Kounouz Education

COLLECTION

KOUNOUZ BAC

SECTION

MATHÉMATIQUES

4e année secondaire

FICHES BAC

- Concentrés de cours
- Exercices types corrigés
- Astuces méthode

GÉOMÉTRIE

En pleine Forme !

Kounouz Editions

Kounouz Bac

Fiches Bac

MATHS

SECTION MATHÉMATIQUES

GÉOMÉTRIE

Abderrahmen Mimouni
Inspecteur principal des écoles préparatoires
et des lycées secondaires

Abdelbasset Laataoui
Professeur principal

Nabil Ammar
Professeur principal

Salima Fakhfakh Maalej
Professeur principal

Sami Benrhim
Professeur principal

© Kounouz Editions 2013
Adresse : 123, Avenue Habib Thameur
Nabeul – 8000 Tunisie
Tél : (+216) 72 223 822
Fax : (+216) 72 223 922
E-mail : Kounouz.Edition@gnet.tn
Site Web : www.Kounouz-Edition.com

Tous les droits sont réservés à l'éditeur.

Préface

Ces fiches sont conçues dans l'intention de faciliter aux futurs bacheliers leur révision et de bien les préparer à l'examen qu'ils auront à passer.

Elles sont conformes aux programmes en vigueur en 4ème année et respectent leurs contenus et leur progression. Elles ont un double avantage pour l'élève puisque d'une part, elles lui donnent un résumé clair des cours et des repères utiles insistant sur les aspects essentiels à retenir. D'autre part, elles l'aident à acquérir une méthodologie de travail lui permettant d'appréhender les difficultés et de les résoudre par l'analyse et la réflexion.

Ces fiches réservent une grande partie à la pratique en proposant des exercices variés portant sur les différentes difficultés et aidant l'élève à assimiler les contenus par la mise en œuvre de ses acquis.

Des corrigés et des réponses détaillés sont donnés à l'élève en guise de pistes de travail pouvant le guider dans la réalisation des exercices et lui permettant de pratiquer son autoévaluation. Cette activité lui permettra de prendre conscience de ses lacunes et de ses difficultés qu'il essaiera de dépasser par la consolidation de ses connaissances.

Nous espérons que ce travail aura l'efficacité requise et aidera les élèves à réaliser une révision méthodique et réfléchie qui les mènera à la réussite.

Les auteurs

Sommaire

N°	CHAPITRE	PAGE
1	Chapitre 1: Nombre complexe	5
2	Chapitre 2: Isométrie, déplacements, antidéplacements	21
3	Chapitre 3: Similitudes	28
4	Chapitre 4: Conique	36
5	Chapitre 5: Géométrie dans l'espace	49
6	Chapitre 6: Arithmétique	58
7	Chapitre 7: Probabilités	68
8	Chapitre 8: Statistiques	77

CHAPITRE 1

Nombres Complexes

Objectif 1

Ecrire un nombre complexe sous forme algébrique

ENONCES

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{2+5i}{7-i}$; b) $\dfrac{2}{i}+\dfrac{i}{2}$; c) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$; d) $(2+3i)^2$; e) $(5-i)^4$; f) $(1+i)^{2010}+(1-i)^{2011}$

SAVOIR

Pour tous réels x et y : $\boxed{(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2}$; le conjugué de $z = x + iy$ est $\bar{z} = x - iy$.

$\boxed{i^2=(-i)^2=-1 \text{ et } i(-i)=1}$ $\boxed{\dfrac{1}{i}=-i \text{ et } \dfrac{1}{-i}=i}$ $\boxed{(1+i)^2=2i \text{ et } (1-i)^2=-2i}$

Nous multiplierons le numérateur et le dénominateur des quotients par le conjugué du dénominateur.

$\boxed{(x \pm iy)^2 = (x^2 - y^2) \pm 2i\,x\,y}$ $\boxed{i^{4n+r} = \left(\underbrace{i^4}_{1}\right)^n \times i^r = i^r \text{ pour tout } (n,r) \in \mathbb{N}^2}$

Les règles d'addition, de multiplication et de puissances connues dans $\mathbb{R}$ se prolongent à $\mathbb{C}$.

SOLUTIONS

a) $\dfrac{2+5i}{7-i}=\dfrac{(2+5i)(7+i)}{(7-i)(7+i)}=\dfrac{9}{50}+\dfrac{37}{50}i$

b) $\dfrac{2}{i}+\dfrac{i}{2}=2(-i)+\dfrac{1}{2}i=\left(-2+\dfrac{1}{2}\right)i=-\dfrac{3}{2}i$

c) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i-2i}{2}=0$

d) $(2+3i)^2=4-9+2i\times 6=-5+12i$

e) $(5-i)^4=25-1-2i\times 5=24-10i$

f) $\left((1+i)^2\right)^{1005}+\left((1-i)^2\right)^{1005}(1-i)^1=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}(1-i)$

$=2^{1005}i^{1005}(1-1+i)=2^{1005}i^{\overbrace{4\times 251+2}^{1006}}=-2^{1005}$

Objectif 2

Ecrire un nombre complexe sous forme trigonométrique

ENONCES

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

$z = 2\cos\frac{\pi}{5} - 2i\sin\frac{\pi}{5}$; $z' = -\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$ et $z'' = \sin\frac{\pi}{9} + i\cos\frac{\pi}{9}$

SAVOIR

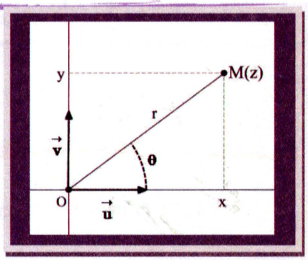
☞ Soit M(z) un point du plan distinct de O.($z \neq 0$)

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est la forme trigonométrique de z

r est le module de z, on note : $r = |z|$ $(r > 0)$;

θ est un argument de z, on note : $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

Dire que $M(r,\theta)$ a pour coordonnées polaires (r,θ) signifie que : $\begin{cases} r = OM \\ (\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$



☞ Pour tout réel x, on a : $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases}$

SOLUTIONS

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

$$z' = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7}$$

$$z'' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) = \cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}$$

Objectif 3

Ecrire un nombre complexe sous forme exponentielle

ENONCES

1) Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$z=\sqrt{6}-i\sqrt{2}$, $z'=\dfrac{i}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$ et $z''=\dfrac{-\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)^2}{(1+i)^6}$

2) Soit $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Mettre sous forme exponentielle

$z_1=\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$, $z_2=\cos x-\sin x+i(\cos x+\sin x)$ et $z_3=(i+\tan x)^2$

SAVOIR

On note : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ***par conséquence on a : pour tout*** $z\in\mathbb{C}^*$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=[r,\theta]=re^{i\theta}$ **forme exponentielle de z**

Cohérence et efficacité de cette notation : L'avantage de cette notation est que, connaissant déjà beaucoup de propriétés de la fonction puissance, nous allons pouvoir « en oublier » la plupart de celles des arguments. En effet, les propriétés suivantes nous permettra d'en retrouver la grande majorité, voire de les utiliser sans s'en rendre compte

Propriétés :

$\cos\theta-i\sin\theta=\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\dfrac{1}{e^{i\theta}}$ $\quad e^{i\theta}e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$

$\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$ $\quad \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ formule de Moivre

Remarques : $e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ $\quad -e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$ $\quad e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}=1$

Une écriture $re^{i\theta}$ ***est une forme exponentielle ssi*** $r>0$

Retenons : $1=e^{i0}$, $-1=e^{i\pi}$, $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $-1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

SOLUTIONS

1) $|z|=\sqrt{6+2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $z=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$z'=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ et } z''=\frac{e^{i\pi}\left(2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6}=\frac{e^{i\pi}\times 8e^{-i\frac{\pi}{3}}}{8e^{i\frac{3\pi}{2}}}=e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

2) $$z_1=\frac{1+i\tan x}{1-i\tan x}=\frac{1+i\,\frac{\sin x}{\cos x}}{1-i\,\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}=\frac{e^{ix}}{e^{-ix}}=e^{i(x+x)}=e^{i2x}$$

$$z_2=\cos x-\sin x+i\cos x+i\sin x=\cos x+i\sin x+i\cos x-\sin x$$

$$=e^{ix}+i\left(\cos x+i\sin x\right)=e^{ix}+ie^{ix}=\left(1+i\right)e^{ix}$$

or $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ alors $z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{ix}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

$$z_3=\left(\frac{i}{\cos x}\left(\cos x-i\sin x\right)\right)^2=\frac{-1}{\cos^2 x}\left(e^{-ix}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}e^{i\pi}e^{-i2x}=\frac{1}{\cos^2 x}e^{i(\pi-2x)}$$

Objectif 4

Utiliser les formules de Moivre et d'Euler pour simplifier et linéariser des polynômes trigonométriques

ENONCES

1) θ désigne un réel.
   a) Exprimer $\cos 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$
   b) Exprimer $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$
2) Linéariser
   a) $\sin^4\theta$ b) $\cos^2\theta\sin\theta$ c) $\sin^2\theta\cos\theta$ (vous pouvez utiliser b)

SAVOIR

☞ ***Formule de Moivre :*** Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ *et* $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n}$

Formule de binôme : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *et* $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k}$

Exemple : Pour $n=4$, $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

☞ ***Formules d'Euler :*** $\boxed{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta \text{ et } \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta}$ ou $\boxed{e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta \text{ et } e^{i\theta}-e^{-i\theta}=2i\sin\theta}$

SOLUTIONS

1) $\cos 4\theta+i\sin 4\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^4$ d'après la formule de Moivre.

Développons : $(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos^4\theta+4i\cos^3\theta\sin\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta-4i\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta$

Donc $(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\underbrace{\left(\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\right)}_{\text{Partie réelle}}+i\underbrace{4\left(\cos^3\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^3\theta\right)}_{\text{Partie imaginaire}}$

En identifiant parties réelle et imaginaire, on trouve :

a) $\cos 4\theta=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+\left(1-\cos^2\theta\right)^2=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$

b) $\sin 4\theta=4\cos^3\theta\sin\theta-4\cos\theta\sin^3\theta$

2)

a) $\sin^4\theta=\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$

$=\dfrac{1}{16}\left(e^{i\theta}-4e^{i3\theta}e^{i\theta}+6e^{i2\theta}e^{-i2\theta}-4e^{i\theta}e^{-i3\theta}+e^{-i4\theta}\right)$

$=\dfrac{1}{16}\left(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}-4\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)+6\right)$

$=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}\right)+\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{8}\cos 4\theta-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta+\dfrac{3}{8}$

b) $\cos^2\theta\sin\theta=\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)=\dfrac{1}{8i}\left(e^{i2\theta}+2+e^{-i2\theta}\right)\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)=\dfrac{1}{8i}\left(e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}+e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}}{2i}+\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\sin 3\theta+\sin\theta\right)=\dfrac{1}{4}\sin 3\theta+\dfrac{1}{4}\sin\theta$

c) $\sin^2\theta\cos\theta=\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$.

Utilisons le résultat de b) , en remplaçant θ par $\dfrac{\pi}{2}-\theta$:

$\sin^2\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}\left(\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-3\theta\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$

$=-\dfrac{1}{4}\cos 3\theta+\cos\theta$

Objectif 5

Ecrire $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ sous forme exponentielle

ENONCES

Soient θ *et* θ' deux nombres réels.

a) Transformer $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ en factorisant par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ sous la forme $re^{i\varphi}$ où r *et* φ sont des réels

b) En déduire la forme exponentielle des nombres complexes $z = 1 + e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z' = e^{i\frac{4\pi}{7}} - 1$ *et* $z'' = e^{-i\frac{5}{9}} + i$

SAVOIR

$$e^{i\alpha} \pm e^{i\beta} = \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} \pm e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Appliquer les formules d'Euler

SOLUTIONS

a) $e^{i\theta} + e^{-i\theta'} = \left(e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}} + e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$

b) $z = e^{i\frac{\pi}{5}} + e^{i0} = 2\cos\frac{\pi}{10} e^{i\frac{\pi}{10}} \cdot \cos\frac{\pi}{10} > 0 \; car \; \frac{\pi}{10} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$z' = e^{i\pi} + e^{i\frac{4\pi}{7}} = 2\cos\frac{3\pi}{14} e^{i\frac{11\pi}{14}} \cdot \cos\frac{3\pi}{14} > 0 \; car \; \frac{3\pi}{14} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$z'' = e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i\frac{5\pi}{9}} = 2\cos\frac{19\pi}{36} e^{-i\frac{\pi}{36}} = -2\cos\frac{19\pi}{36} e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{36}\right)} = -2\cos\frac{19\pi}{36} e^{i\left(\frac{35\pi}{36}\right)} \cdot \cos\frac{19\pi}{36} < 0 \; car \; \frac{19\pi}{36} \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Objectif 6

Résoudre des équations complexes du second degré

ENONCES

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2-6z+10=0$ b) $z^2+i\sqrt{3}z-i=0$ c) $z^2-2(1+2i)z-3+2i=0$

2) Soit θ un réel de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation ***(E)*** : $z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0$

3) Soit $a\in\mathbb{C}$. Vérifier que $z'=a+i$ est solution de l'équation $z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$ puis déterminer l'autre solution z''.

SAVOIR

☞ Soit a, b et c des nombres complexes tel que $a\neq 0$. L'équation $az^2+bz+c=0$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) $z=\frac{-b\pm\delta}{2a}$ *avec* $\Delta=b^2-4ac=\delta^2$

☞ Soit a, b' et c des nombres complexes tel que $a\neq 0$. L'équation $az^2+2b'z+c=0$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) $z=\frac{-b'\pm\delta'}{a}$ *avec* $\Delta'=b'^2-ac=\delta'^2$

☞ Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2-y^2\pm 2ixy=(x\pm iy)^2$

Soit a, b et c des nombres complexes tel que $a\neq 0$. Si z' et z'' sont solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ alors $z'+z''=-\frac{b}{a}$ et $z'z''=\frac{c}{a}$

SOLUTIONS

1) a) $z^2-6z+10=0$; $\Delta'=9-10=-1=i^2$ donc $\delta'=i$ et les solutions sont $3+i$ et $3-i$

b) $z^2+i\sqrt{3}z-i=0$; $\Delta=-3+4i=1^2-2^2+2i\times1\times2=(1+2i)^2$ donc $\delta=1+2i$ et les solutions sont :

$\frac{-i\sqrt{3}+1+2i}{2}=\frac{1}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\frac{-i\sqrt{3}-1-2i}{2}=\frac{-1}{2}-i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$

c) $z^2-2(1+2i)z-3+2i=0$; $\Delta'=(1+2i)^2+3-2i=2i=(1+i)^2$ donc $\delta'=1+i$

et les solutions sont : $1+2i+1+i=2+3i$ *et* $1+2i-1-i=i$

2) $a=1\ ;\ b'=i\sin\theta\ \ ;\ c=-2i\sin\theta\ \ ;$

$\Delta'=b'^2-ac=-\sin^2\theta+2i\cos\theta=\cos^2\theta-1+2i\cos\theta=(\cos\theta+i)^2$

donc $\delta'=\cos\theta+i$ et les solutions sont :

$-i\sin\theta+\cos\theta+i=\cos\theta+i(1-\sin\theta)$ et $-i\sin\theta-\cos\theta-i=-\cos\theta-i(1+\sin\theta)$

3) $(a+i)^2-(1+a)(1+i)(a+i)+(1+a^2)i$

$=a^2-1+2ai-a-ia+1-i-a^2-ai-a^2i+a+i+a^2i=0$

Donc z' est une solution de l'équation

On a $z'+z''=(1+a)(1+i)=1+i+a+ai$ donc $z''=1+i+a+ai-z'=1+ai$

Objectif 7

Résoudre des équations complexes de troisième degré

ENONCES

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = 0$.

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire que l'on déterminera.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(E).

SAVOIR

Un nombre complexe z_0 est une racine d'un polynôme P de degré un entier naturel non nul n et à coefficients complexes si et seulement si $P(z_0)=0$ si et seulement s'il existe un polynôme Q de degré n-1 et à coefficients complexes tel que $P(z)=(z-z_0)\times Q(z)$

SOLUTIONS

a) Soit $y\in\mathbb{R}$. yi est une solution de ***(E)*** si et seulement si

$(yi)^3 - 2(\sqrt{3}+i)(yi)^2 + 4(1+i\sqrt{3})(yi) - 8i = 0$

soit $-iy^3 + 2y^2(\sqrt{3}+i) + 4yi(1+i\sqrt{3}) - 8i = 0$

soit $\left(2\sqrt{3}y^2 - 4\sqrt{3}y\right) + i\left(-y^3 + 2y^2 + 4y - 8\right) = 0$ qui équivaut à

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}y^2 - 4\sqrt{3}y = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}y(y-2) = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } y = 2 \\ -y^3 + 2y^2 + 4y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2$$

b) Donc 2i est une solution imaginaire de l'équation ***(E)***

$z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i = (z-2i)\left(az^2+bz+c\right)$

$= az^3 + (b-2ia)z + (c-2ib)z - 2ic$

Par identification on a : $\begin{cases} a=1 \\ b-2ia=-2\left(\sqrt{3}+i\right) \\ c-2ib=4\left(1+i\sqrt{3}\right) \\ -2ic=-8i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2\sqrt{3} \\ c=4 \end{cases}$

D'où ***(E)*** $\Leftrightarrow z-2i=0$ *ou* $z^2-2\sqrt{3}z+4=0 \Leftrightarrow z=2i$ *ou* $z=\sqrt{3}-i$ *ou* $z=\sqrt{3}+i$ $\left(\Delta=-1=i^2\right)$

Objectif 8

Déterminer les racines nièmes d'un nombre complexe

ENONCES

1) Déterminer les racines carrées de $9+40i$ et les racines quatrièmes de $-7-24i$

2) Déterminer a) les racines cubiques de l'unité b) Les racines quatrièmes de $16e^{i\frac{\pi}{3}}$

SAVOIR

☞ Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
La recherche d'une racine carrée d'un nombre complexe $a+bi$ sous forme algébrique ça revient à déterminer un couple de deux réels (x,y) vérifiant $\begin{cases} 2xy=b \\ x^2-y^2=a \end{cases}$ et donc $x+iy$ est une racine de $a+bi$

☞ Les racines nièmes d'un nombre complexe non nul Z_0 sont les solutions de l'équation complexe : $z^n=Z_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

☞ L'équation $z^n=Re^{i\theta}$ $(\text{où } R>0)$ admet exactement n solutions qu'on note z_k où $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ telles que $z_k=\sqrt[n]{R}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ (où $\sqrt[n]{R}$ est le réel positif qui puissance n égal à R)

☞ Les racines nième de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n=1$ c'est-à-dire les z_k où $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ telles que $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

SOLUTIONS

1) $9+40i=5^2-4^2+2i\times5\times4=(5+4i)^2$ donc les racines carrées de $9+40i$ sont $5+4i$ et $-5-4i$

Comme $z^4=-7-24i\Leftrightarrow\left(z^2\right)^2=-7-24i$ alors les racines quatrièmes de $-7-24i$ sont les racines carrées de ses racines carrées. Commençons par déterminer les racines carrées de $-7-24i$

$-7-24i=3^2-4^2-2i\times3\times4=(3-4i)^2$ donc les racines carrées de $-7-24i$ sont $3-4i$ et $-3+4i$

$3-4i=2^2-1^2-2i\times2\times1=(2-i)^2$ et $-3+4i=-(3-4i)=\left(i(2-i)\right)^2=(1+2i)^2$

Donc les racines quatrièmes de $-7-24i$ sont $2-i$, $-2+i$, $1+2i$ et $-1-2i$

2) a) Les racines cubiques de l'unité sont les $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ où $k\in\{0,1,2\}$ soit : 1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

b) Les racines quatrièmes de $16e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les $z_k=\sqrt[4]{16}\,e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)}$ où $k\in\{0,1,2,3\}$ soit :

$2e^{i\frac{\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{12}}$, $2e^{i\frac{13\pi}{12}}$ et $2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

Objectif 9

Résoudre des équations avec changement de variable

ENONCES

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^4+5z^2+6=0$ b) $z^6+(1-i)z^3-i=0$ c) $1-\frac{z+i}{z-i}+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0$

SAVOIR

Soit a, b et c des nombres complexes tel que $a\neq 0$.

Si $a+b+c=0$ alors 1 et $\frac{c}{a}$ sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$.

Si $a-b+c=0$ alors -1 et $-\frac{c}{a}$ sont les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$.

SOLUTIONS

a) Posons $Z=z^2$; l'équation équivaut à : $Z^2+5Z+6=0$; il y a deux solutions, égale à -2 et -3, soit $2i^2$ *et* $3i^2$; il existe donc quatre solutions : $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$, $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$

b) Posons $Z=z^3$; l'équation équivaut à : $Z^3+(1-i)Z-i=0$; $\left(1-(1-i)-i=0\right)$ il y a deux solutions, égale à -1 et i , soit $e^{i\pi}$ *et* $e^{i\frac{\pi}{2}}$; de racines cubiques respectives $e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ et $e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k\in\{0,1,2\}$ il existe donc six solutions : $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}$, $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$

c) en posant $Z=\frac{z+i}{z-i}$ on se ramène à $1-Z+Z^2+Z^3=0$.

Or : $1-Z+Z^2-Z^3=(1-Z)(1+Z^2)$ Donc : $1-Z+Z^2-Z^3=0\Leftrightarrow Z=1$ *ou* $Z^2=-1\Leftrightarrow Z\in\{1,i,-i\}$

Par conséquent : $1-\frac{z+i}{z-i}+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0\Leftrightarrow\frac{z+i}{z-i}\in\{1,i,-i\}$

De plus : $\frac{z+i}{z-i}=1\Leftrightarrow z+1=z-i$ *et* $z\neq i\Leftrightarrow 2i=0$, ce qui absurde donc il n'y a pas de solution dans ce cas.

Puis : $\frac{z+i}{z-i}=i\Leftrightarrow z+i=i(z-i)$ et $z\neq i\Leftrightarrow z=1$ Enfin : $\frac{z+i}{z-i}=-i\Leftrightarrow z+i=-i(z-i)$ et $z\neq i\Leftrightarrow z=-1$

L'ensemble S des solutions de l'équation $1-\frac{z+i}{z-i}+\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2-\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=0$ est donc : $\boxed{S=\{1,-1\}}$

Objectif 10

Interpréter algébriquement la colinéarité et l'orthogonalité de deux vecteurs

ENONCES

Trouver les ensembles des points M dont les affixes z vérifient les relations suivantes :

a) $\dfrac{iz+2}{z-1} \in \mathbb{R}$ b) $\dfrac{i\bar{z}+2}{z-1} \in i\mathbb{R}$

SAVOIR

Théorème de rapport des affixes de deux vecteurs : Soit $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ deux vecteurs non nuls.

- $\dfrac{aff(\overrightarrow{W_1})}{aff(\overrightarrow{W_2})} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{W_1}$ *et* $\overrightarrow{W_2}$ sont colinéaires
- $\dfrac{aff(\overrightarrow{W_1})}{aff(\overrightarrow{W_2})} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{W_1}$ *et* $\overrightarrow{W_2}$ sont orthogonaux

Recherche d'ensemble des points géométriquement :

- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires est la droite (AB)
- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ est le cercle de diamètre $[AB]$
- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $MA = MB$ est la médiatrice du segment $[AB]$
- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $AM = R$ est le cercle de centre A et de Rayon R.
- L'ensemble des points M d'affixes z telle que $(\overrightarrow{AM}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BM}) \equiv \theta[2\pi]$ est :
- L'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ privé de A et B du cercle tangent à $[AT)$ tel que $(\overrightarrow{AT}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AB}) \equiv \theta[2\pi]$ si $\theta \in]-\pi, 0[$
- L'arc orienté $\overset{\frown}{BA}$ privé de A et B du cercle tangent à $[AT)$ tel que $(\overrightarrow{AT}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AB}) \equiv \theta[2\pi]$ si $\theta \in]0, \pi[$
- La droite (AB) privée du segment $[AB]$ si $\theta = 0$ • Le segment $[AB]$ privé de A et B si $\theta = \pi$

SOLUTIONS

a) $\dfrac{iz+2}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{i(z-2i)}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow i\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}} \in i\mathbb{R}$

avec $A(1)$ et $B(2i)$ ce qui signifie que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \\ M \neq A \end{cases}$ et donc l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A $\dfrac{i\bar{z}+2}{z-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{-iz+2}{z-1}\right)} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{-iz+2}{z-1} \in i\mathbb{R}$

b) $\dfrac{-i(z+2i)}{z-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow -i\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}} \in \mathbb{R}$ avec $A(1)$ et $B(-2i)$

ce qui signifie que $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BM} \text{ sont colinéaires} \\ M \neq A \end{cases}$ et donc l'ensemble cherché est la droite (AB) privée de A

Objectif 11

Reconnaitre une application par sa transformation complexe

ENONCES

Caractériser l'application f qui a chaque point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

1) a) $z'=z+1+2i$ b) $z'=iz-1+i$ c) $z'=2z-3+i$ d) $z'=(1+i)z-2i$

2) a) $z'=\bar{z}+2+2i$ b) $z'=i\bar{z}-1+i$ c) $z'=2i\bar{z}+1-2i$

SAVOIR

☞ ***Similitude directe :*** Si l'écriture complexe d'une transformation géométrique f est de la forme $z'=az+b$ avec $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$ alors f est une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$, et si en plus $a\neq 1$ alors f admet un centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$

☞ ***Cas particuliers :***

✓ ***Si*** $a=1$ et $b=0$, ***alors*** f est l'identité du plan

✓ ***Si*** $a=1$, ***alors*** f est une translation de vecteur d'affixe b

✓ ***Si*** $a\neq 1$ et $|a|=1$, ***alors*** f est une rotation d'angle $\arg(a)$ et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$

✓ ***Si*** $a\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$, ***alors*** f est une homothétie de rapport a et de centre le point d'affixe $\frac{b}{1-a}$

☞ ***Similitude indirecte :*** Si l'écriture complexe d'une transformation géométrique f est de la forme $z'=a\bar{z}+b$ avec $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$ alors f est une similitude indirecte de rapport $|a|$, et si en plus $|a|\neq 1$, alors f admet un centre d'affixe $z_I=\frac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$ et un axe $\Delta=\{M(z)\in\mathbb{C}$ tels que $z'-z_I=|a|(z-z_I)\}$

☞ ***Cas particuliers :***

✓ ***Si*** $|a|=1$ et l'équation $z=a\bar{z}+b$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{C}$, ***alors*** f est une symétrie glissante

✓ ***Si*** $|a|=1$ et l'équation $z=a\bar{z}+b$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$, ***alors*** f est une symétrie orthogonale.

SOLUTIONS

1) Dans tous les cas $z'=az+b$ avec $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$ alors f est une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$

a) Ici $a=1$ et $b=1+2i$ donc f est une translation de vecteur $\vec{u}+2\vec{v}$

b) Ici $a=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $b=-1+i$ donc f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et centre le point d'affixe $\frac{-1+i}{1-i}=-1$

c) Ici $a=2\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ et $b=-3+i$ donc f est une homothétie de rapport 2 et de centre le point d'affixe $\frac{-3+i}{1-2}=3-i$

d) Ici $a=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $b=-2i$ donc f est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point d'affixe $\frac{-2i}{1-1-i}=2$

2) Dans tous les cas $z'=a\bar{z}+b$ avec $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$ alors f est une similitude indirecte de rapport $|a|$

a) Ici $a=1$ et $b=2+2i$. Comme $|a|=1$ alors f est un antidéplacement.

On pose $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; l'équation $z=\bar{z}+2+2i$ est équivaut à $x+iy=x-iy+2+2i$ soit $1+i(1-y)=0$ qui est impossible $(1\neq 0)$ donc f est symétrie glissante ; on pose $\vec{w}$ et Δ respectivement son vecteur et son axe.

Soit $O'=f(O)$, $I=O*O'$ et $I'=f(I)$, on a $z_{O'}=2+2i$, $z_I=\frac{z_O+z_{O'}}{2}=1+i$ et $z_{I'}=1-i+1+2i=i$

On sait que $I\in\Delta$ donc $\vec{W}=\overrightarrow{II'}$ et $\Delta=(II')$ et donc $z_{\vec{w}}=z_{I'}-z_I=-1$ et Δ d'équation $y=1$

b) Ici $a=i$ et $b=-1+i$. Comme $|a|=1$ alors f est un antidéplacement.

On pose $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; l'équation $z=i\bar{z}-1+i$ est équivaut à $x+iy=i(x-iy)-1+i$ soit $y=x+1$ et donc f est une symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y=x+1$

c) Ici $a=2i$ et $b=1-2i$. Comme $|a|=2\neq 1$ alors f est une similitude indirecte de rapport 2 et de centre le point I d'affixe $\frac{2i(1+2i)+1-2i}{1-4}=1$

L'axe de f est $\Delta=\{M(z)\in\mathbb{C}\text{ tels que }z'-1=2(z-1)\}$

$z'-1=2(z-1)\Leftrightarrow 2i\bar{z}+1-2i-1=2z-2\Leftrightarrow i\bar{z}-z+1-i=0$

On pose $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$; l'équation $i\bar{z}-z+1-i=0$ est équivaut à $y=x-1$ et donc Δ d'axe la droite $y=x-1$

CHAPITRE 2

ISOMETRIES
DEPLACEMENTS
ANTIDEPLACEMENTS

Objectif 1

Reconnaitre une isométrie à partir de son ensemble de points invariants

ENONCES

Répondre par Vrai ou Faux :

1) Si une isométrie f n'admet aucun point invariant alors f est une symétrie glissante.

2) Si f est une isométrie qui n'admet aucun point fixe, alors f o f est une translation.

3) Si une isométrie f fixe deux points distincts A et B, alors $f = S_{(AB)}$

4) Si un déplacement f fixe A et B alors f est l'identité du plan.

5) Si Δ est l'axe d'une symétrie glissante f alors pour tout point M de Δ, on a $f(M)=M$.

SAVOIR

- Une isométrie f fixant trois points non alignés est L'id_p.
- Si une isométrie f admet 2 points A et B fixes distincts alors pour tout $M \in (AB)$, $f(M) = M$
- Une isométrie qui fixe deux points distincts est soit une symétrie orthogonale soit l'identité du plan
- Si f admet exactement un point fixe A, alors f est une rotation de centre A
- Une isométrie qui ne fixe aucun point est soit une translation soit une symétrie glissante

SOLUTIONS

1) Faux 2) Vrai 3) Faux 4) Vrai 5) Faux

Objectif 2

Reconnaitre la composé des isométries

ENONCES

I) Répondre par Vrai ou Faux :

I) 1) Si $f = R\left(o, -\frac{2\pi}{3}\right)$,alors $f \circ f = f^{-1}$ 2) Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$

II) Dans le plan orienté, ABCD est un carré de sens direct et de centre O.

1) $S_{(AB)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AD)}$ est une symétrie glissante.

2) $S_{(AB)} \circ S_{(DC)} \circ S_{(AD)}$ est une symétrie orthogonale.

3) $R_{\left(o,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AB)}$ est une symétrie orthogonale d'axe (AC).

4) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$ est une symétrie orthogonale.

5) $R_{\left(c,\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ est symétrie centrale de centre o.

6) $R_{\left(B,\frac{-\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

7) $t_{\overrightarrow{AC}} \circ R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

SAVOIR

- $R_{(O,\theta)} \circ R_{(O,\theta')} = R_{(O,\theta+\theta')}$
- Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{AB}}$ où $A \in \Delta$ et B est le projeté orthogonal de A sur Δ'
- Une symétrie glissante est un antidéplacement qui n'a aucun point invariant
- La forme réduite d'une symétrie glissante est : $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement
- La composée de deux déplacements est un déplacement
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement
- Un déplacement d'angle $\alpha \neq 2k\pi$ est une rotation d'angle α

SOLUTIONS

I) 1) Vrai 2) Faux

II) 1) Faux 2) Faux 3) Faux 4) Vrai 5) Faux 6) Vrai 7) Faux

Objectif 3

Reconnaitre une isométrie définie par son expression analytique

ENONCES

Le plan P orienté est muni d'un repère orthonormé direct. f est l'application qui, au point M(x,y) associe le point M' (x',y') avec $x' = -y + 1$ et $y' = x + 2$

1) Montrer que f est une isométrie 2) Montrer que f est un déplacement 3) Caractériser f

SAVOIR

- Une isométrie f du plan est une application de P dans P vérifiant : « Pour tout couple (A,B) de points de P, d'images respectives A' et B' par f, on a AB=A'B'
- Toute isométrie de P est soit un déplacement soit un antidéplacement.
- Une isométrie f de P est un déplacement si f conserve les mesures des angles orientés, f est un antidéplacement si elle change les mesures des angles orientés en leurs opposés.
- Un déplacement de P est soit une translation, soit une rotation.
- Soit $f : P \to P \qquad M(Z) \to M'(Z') / Z' = aZ + b$

✓ Si $a = 1$ alors $f = t_{\vec{u}}$ *avec* $aff(\vec{u}) = b$

✓ Si $|a| = 1$ alors $f = R(\Omega, \theta)$ avec $Z_\Omega = \frac{b}{1-a}$ et $\theta = \arg(a)\ [2\pi]$

✓ Si $a \in \mathbb{C}$; $f = S(\Omega, \theta, k)$ avec $Z_\Omega = \frac{b}{1-a}$, $\theta \equiv \arg(a)\ [2\pi]$ et $k = |a|$

SOLUTIONS

1) Soient A(a,b) , B(c, d) d'images respectives A'(-b+1 ;a+2), B'(-d+1 ;c+2) par f .

$AB^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$ et $A'B'^2 = (b-a)^2 + (c-a)^2$, on a A'B' = AB donc f est une isométrie du plan.

2) Pour O(0,0) , A(1,0) et B(0,1) on a O'=f(O) avec O'(1,-2)

A'=f(A) avec A'(1,-1) et B'=f(B) avec B'(0,-2). On remarque que

$(\overrightarrow{OA}, \widehat{\ } \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ *et* $(\overrightarrow{O'A'}, \widehat{\ } \overrightarrow{O'B'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, f converse donc l'orientation, c'est un déplacement.

3) L'expression complexe associée à f est

$Z' = x' + iy' = (-y+1) + i(x+2) = i(x+iy) + 1 + i = iZ + 1 + 2i$ (de la forme $Z' = aZ + b$ avec $|a| = 1$)

$|i| = 1$; $\arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ *et* $\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{2} = \frac{1-2+3i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

f est la rotation de centre $I\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Objectif 4

Reconnaitre les éléments caractéristiques d'une symétrie glissante (Axe connu, vecteur connu et les milieux des bipoints (A,f(A)) ; (B,f(B)) sont distincts)

ENONCES

On donne un triangle équilatéral ABC de sens direct. soient I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC]. Préciser la forme réduite de l'antidéplacement f qui transforme C en A et A en B.

SAVOIR

- ✓ Si A et B sont deux points distincts et si A' et B' sont deux points tels que AB=A'B' alors il existe un unique antidéplacement f telque f(A)=A' et f(B) = B'
- ✓ Un antidéplacement du plan est soit une symétrie orthogonale soit une symétrie glissante.

SOLUTIONS

On a AC = BA et AC ≠ 0 , il existe un unique antidéplacement f qui transforme C en A est A en B.

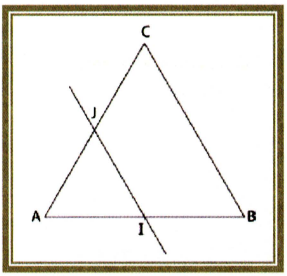
On a f o f (C) = f (A) = B ≠ C donc f n'est pas une symétrie orthogonale, c'est donc une symétrie glissante.

Posons f = $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ directeur A de Δ.

On a: f o f (C) = B donc $t_{2\vec{u}} = \overrightarrow{CB}$ d'où $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{II}$.

f (C) = A donc le milieu I de [AC] ∈ Δ
f (A) = B donc le milieu I de [AB] ∈ Δ
} donc Δ = (IJ)

ainsi $f = t_{\vec{JI}} \circ S_{(IJ)} = S_{(IJ)} \circ t_{\vec{JI}}$



Objectif 5

Caractériser une symétrie glissante

ENONCES

Soit ABCD un carré de centre O telque $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

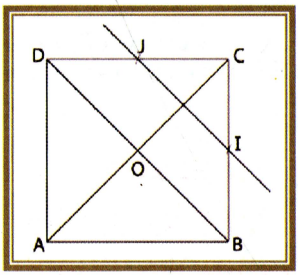
Soit $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(BD)}$. Caractériser f.

SAVOIR

- ✓ Soit f la symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ ;
- ✓ $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ directeur de Δ, on a : $f \circ f = t_{\overrightarrow{2u}}$.
- ✓ Le milieu d'un point et son image par une symétrie glissante f est un point de l'axe de f.

S'assurer toujours après la caractérisation d'une symétrie glissante f que le vecteur de f est directeur de l'axe de f.

SOLUTIONS



f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est alors un antidéplacement.
f O f (D) = f(f(D)) = f(C) = B ≠ D : f n'est pas une symétrie orthogonale, c'est donc une symétrie glissante.

Soient $\vec{u}$ et Δ respectivement le vecteur et l'axe de f, f s'écrit :

$f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$ *avec* $\vec{u}$ directeur de Δ.

On a : f o f (D) = f (C) = B donc $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

f (C) = B
f (D) = C
} donc Δ = (IJ) avec I et J désignent.

les milieux respectifs des segments [BC] et [CD].

Ainsi $f = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}} \circ S_{(IJ)} = S_{(IJ)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}}$; $OR\ \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{JI}$

Donc : $f = t_{\overrightarrow{JI}} \circ S_{(IJ)} = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{JI}}$.

Objectif 6

Caractériser une symétrie glissante : (Axe et vecteur inconnus et les milieux des bipoints (A, f(A)) ; (B, f(B)) sont confondus)

ENONCES

Soit ABCD un carré direct de centre O.

1) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A sur C et B sur D.

2) Déterminer S_O o f (A) et S_O o f (B). Déduire la nature et les éléments caractéristiques de S_O of et vérifier que $f = S_O \circ S_{(AB)}$.

3) Donner la forme réduite de f.

SAVOIR

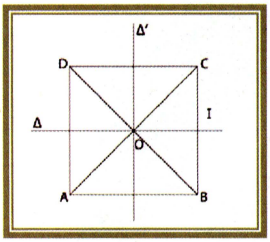
On peut caractériser une symétrie glissante f de la façon suivante :

- ✓ Composer f avec un déplacement.
- ✓ Caractériser cette composition (qui est un antidéplacement)

Déduire f en décomposant convenablement le déplacement.

SOLUTIONS

1) On a : AB = CD et AB ≠ o donc il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en C et B en D.
Les médiatrices de [AC] et [BD] sont distinct, f n'est pas donc une symétrie orthogonale, c'est une symétrie glissante.



2) S_O o f(A) = S_O (C) = A
S_O o f(B) = S_O (D) = B
S_O o f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement, fixant les points A et B est donc la symétrie orthogonale d'axe (AB)
$S_O \circ f = S_{(AB)}$ équivaut à $f = S_O \circ S_{(AB)}$.

3) Soient Δ la parallèle à (AB) passant par O et Δ' la perpendiculaire a (AB) passant par O.
on a : $S_O = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$.

$f = S_O \circ S_{(AB)} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta \circ S_{(AB)} = S_{\Delta'} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$

Comme $\overrightarrow{AD}$ est directeur de Δ', f est alors la symétrie glissante d'axe Δ' et de vecteur $\overrightarrow{AD}$

$f = t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ t_{\overrightarrow{AD}}$

CHAPITRE 3

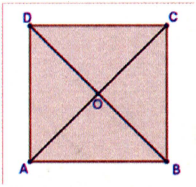
SIMILITUDES

Objectif 1

Reconnaitre une similitude directe sur une configuration

ENONCES

Dans le plan orienté, ABCD est un carré de centre O, tel que $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$



a) Justifier qu'il existe une unique similitude directe de centre A qui transforme B en C.

b) Déterminer ses éléments caractéristiques.

SAVOIR

☞ Si A , B , A' et B' sont quatre points donnés tels que A≠B et A'≠B', alors il existe une unique similitude directe S qui transforme A en A' et B en B'.

☞ S est la similitude directe de centre Ω, de rapport K et d'angle θ.

✓ $S\ (\Omega)=\Omega$

✓ Pour tout point M≠Ω , $S\ (M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}\Omega M'=K\Omega M\\ \left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}\right)\equiv\theta[2\pi]\end{cases}$

SOLUTIONS

a) A≠B et A≠C, il existe donc une unique similitude directe S qui fixe A et transforme B en C.

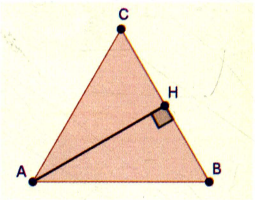
b) Son centre est A, son rapport est $k=\frac{AC}{AB}$ .Or dans le triangle rectangle ABC, le théorème de Pythagore donne $AC^{\,2}=AB^{\,2}+BC^{\,2}=2AB^{\,2}$, d'où $AC=AB\sqrt{2}$. Donc $k=\sqrt{2}$ .Son angle est $\theta=\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\right)$ Donc $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Objectif 2

Caractériser une similitude directe (Triangle rectangle et hauteur)

ENONCES

ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.



La hauteur issue de A, coupe le segment [BC] en H.

a) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S_1 de centre A qui transforme B en H.

b) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S_2 de centre B qui transforme A en H.

SOLUTIONS

a) $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AH}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $\frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}}{AB} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}AB^2}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ S_1 d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$

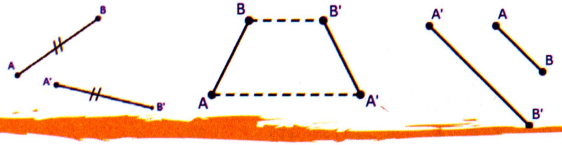
b) $(\overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BH}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\frac{BH}{BA} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ S_2 d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

Objectif 3

Construire le centre d'une similitude directe

ENONCES

A ,B , A′ et B′ sont des points tels que $A \neq B$, $A' \neq B'$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$.
S est la similitude directe qui transforme A en A′ et B en B′.
Dans chaque cas, construire le centre Ω de la similitude directe S.



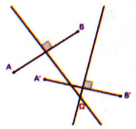
SAVOIR

- f similitude directe et h homothétie alors : $\boxed{f(I,k,0) = h_{(I,k)}}$; $\boxed{f(I,k,\pi) = h_{(I,-k)}}$;
  $\boxed{h_{(I,3)} = f(I,3,0)}$; $\boxed{h_{(I,-3)} = f(I,3,\pi)}$
- f similitude directe de rapport 1 $\Leftrightarrow$ f est un ***déplacement*** { *translation* / *rotation*
- f similitude directe de rapport 1 et de centre $I \Leftrightarrow f = R_{(I,\theta)}$

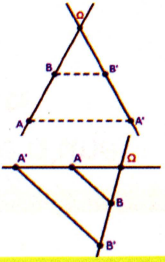
$\boxed{f(I,1,\theta) = R_{(I,\theta)}}$; $\boxed{f(I,1,0) = R_{(I,0)} = idp = t_{\vec{0}} = h_{(I,1)}}$; $\boxed{f(I,1,\pi) = R_{(I,\pi)} = S_I = h_{(I,-1)}}$

SOLUTIONS

a) Le rapport de S est $k = \dfrac{S(A)S(B)}{AB} = \dfrac{A'B'}{AB} = 1$ et S est une rotation.
Le centre Ω de S est tel que $\Omega A = \Omega A'$ et $\Omega B = \Omega B'$, donc Ω est le point d'intersection des médiatrices de [AA'] et [BB'].



b) Ici encore, le rapport de 1 et S est une rotation. Mais les médiatrices de [AA'] et [BB'] sont confondues.
$\Omega \in (AB) \cap (A'B')$



c) Dans ce cas, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv 0[2\pi]$ et S est une homothétie de rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et $\Omega \in (AA') \cap (BB')$.

Objectif 4

Déterminer le centre d'une similitude directe

ENONCES

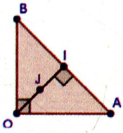
Soit OAB un triangle rectangle isocèle directe en O ; I=A * B, et J=O*I.

1) Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe S qui envoie O en I et A en J.

2) a) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient à un cercle circonscrit au triangle OJA.

b) Montrer que Ω est un point du cercle de diamètre [OB].

c) Construire alors le point Ω.



SAVOIR

Etant donnés quatre points A, B, C et D deux à deux distincts

alors A, B, C, D sont situés sur un méme cercle ou alignés $\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})[\pi]$

SOLUTIONS

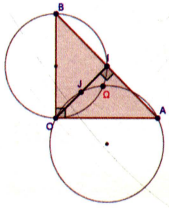
1) On a $S(O)=I$ et $S(A)=J$ donc $k=\dfrac{S(O)\,S(A)}{OA}=\dfrac{IJ}{OA}=\dfrac{1}{2}\dfrac{OI}{OA}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{IJ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{IO}})[2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{IO}})+\pi[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{4}+\pi[2\pi] \equiv \dfrac{5\pi}{4}[2\pi] \equiv -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ donc

$\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$

2) a) on a $S(A)=J \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega J}}) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ ([OJ) la bissectrice de $A\hat{O}B$ car OAB isocèle en O) or $-\dfrac{3\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{4}[\pi]$ donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega J}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ}})[\pi] \Rightarrow \Omega$ appartient à un cercle circonscrit au triangle OAJ.

b) On a $S(O)=I \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega I}}) \equiv -\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ or $(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BI}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ (ABC triangle rectangle en O et $I \in [BA]$) donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega O},\overrightarrow{\Omega I}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BI}})[\pi] \Rightarrow \Omega$ appartient à un cercle circonscrit au triangle OBI or $O\hat{I}B = 90°$ (AOB isocèle et $I = A*B$) donc Ω appartient à un cercle de diamètre [OB].

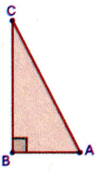


Objectif 5

Reconnaître une similitude indirecte sur une configuration

ENONCES

On considère un triangle rectangle ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$



a) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte g de centre Ω et d'axe Δ qui transforme A en B et B en C.

b) Préciser le rapport de g.

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g \circ g$.

d) En déduire que $\overrightarrow{A\Omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. e) Construire Ω et Δ.

SAVOIR

☞ Si A ,B , A' et B' sont quatre points donnés tels que A≠B et A'≠B', alors il existe une unique similitude indirecte qui transforme A en A' et B en B'.

☞ Si f est une similitude indirecte de centre Ω, de rapport k et d'angle Δ, alors f peut s'écrire comme la composée de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k, avec une symétrie axiale d'axe Δ.
On a ainsi : $f = h \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h$.

☞ Si f est une similitude indirecte de centre Ω, de rapport k, alors
$f \circ f$ est une homothétie de centre Ω et de rapport k^2.

☞ Axe d'une similitude indirecte de centre Ω et de rapport k :

✓ C'est l'ensemble des points M du plan vérifiant : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ où $M' = f(M)$.

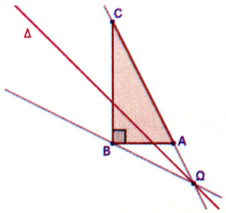
✓ L'axe porte la bissectrice intérieure de l'angle $M\widehat{\Omega}M'$ où $M' = f(M)$.

SOLUTIONS

a) A≠B et B ≠C donc il existe une unique similitude indirecte g de centre Ω, de rapport k et d'axe Δ.

b) Le rapport de g est $k = \frac{S(A).S(B)}{AB} = \frac{BC}{AB} = 2$.

c) g est une similitude de rapport $2 \neq 1$ donc
$g = h(\Omega,2) \circ S_\Delta = S_\Delta \circ h(\Omega,2)$
d'où $g \circ g = h(\Omega,2) \circ h(\Omega,2) = h(\Omega,4)$.
$g \circ g(A) = C$ et $g \circ g = h(\Omega,4) \Rightarrow h(\Omega,4)(A) = C$
$\Rightarrow \overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega A} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega C} - 4\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$
donc Ω est le G est le barycentre du système{ (C,1) ; (A,–4)}
$\Rightarrow \overrightarrow{A\Omega} = \frac{1}{1-4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



d) Ω étant le centre de g et g(A) = B. Donc l'axe Δ de g porte la bissectrice intérieure de l'angle $A\widehat{\Omega}B$.

Objectif 6

Caractériser une similitude directe dans le plan complexe

ENONCES

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A, B, A' et B' d'affixes : $z_A = 2 - i$, $z_B = -1 + 2i$, $z_{A'} = 1$ et $z_{B'} = 1 + 6i$.
Déterminer le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe transformant A en A' et B en B'.

SAVOIR

L'écriture complexe d'une similitude directe est $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$

Son rapport est $k = |a|$, son angle $\theta \equiv \arg a\ [2\pi]$ et son centre est Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

SOLUTIONS

L'écriture complexe d'une similitude indirecte est de la forme : $z' = az + b$ avec $a \in C^*$ et $b \in C$.
Comme la similitude directe transforme A en A', on a : $1 = a(2 - i) + b$.
Comme la similitude directe transforme B en B', on a : $1 + 6i = a(-1 + 2i) + b$.

En soustrayant les deux égalités, on obtient : $6i = a(-3 + 3i)$ d'où $a = \dfrac{6i}{-3+3i}$

$$a = \frac{2i}{-1+i} = \frac{2i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{2-2i}{(-1)^2+1^2} = 1 - i.$$

On déduit de la première égalité que : $1 = (1 - i)(2 - i) + b$ d'où $1 = 1 - 3i + b$ d'où $b = 3i$.
Finalement l'expression complexe de la similitude directe est : $z' = (1 - i)z + 3i$.
On en déduit le rapport de cette similitude directe : $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$
On en déduit une valeur de l'angle de cette similitude directe : $\theta = \arg(1 - i)$.

On a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d'où $\theta = \dfrac{-\pi}{4}$.

Le centre de cette similitude indirecte est son seul point fixe Ω d'affixe ω avec :

$\omega = (1 - i)\ \omega + 3i$ d'où $\omega = \dfrac{3i}{i} = 3$.

Objectif 7

Caractériser une similitude indirecte dans le plan complexe

ENONCES

Soient les points A, B, A', B' d'affixes : $z_A = 1$; $z_B = 2 + 2i$; $z_{A'} = -1 + i$; $z_{B'} = 2$.

1) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte f, que l'on déterminera par son écriture complexe, telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

2) Soit C le point d'affixe $z_C = \dfrac{7}{2}$.

a) Calculer l'affixe du point $C' = f(C)$.

b) Montrer que ABC et A'B'C' sont des triangles isocèles.

SAVOIR

L'écriture complexe d'une similitude indirecte est $z' = a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$

Son rapport est $k = |a|$ et son centre est Ω d'affixe $\omega = \dfrac{a\bar{b}+b}{1-|a|^2}$

SOLUTIONS

1) L'écriture complexe d'une similitude indirecte est de la forme : $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On cherche un unique couple $(a ; b)$ tel que : $\begin{cases} -1+i = a\times\overline{1}+b \\ 2 = a\times\overline{2+2i}+b \end{cases}$ ou bien tel que $\begin{cases} -1+i = a+b \\ 2 = a(2-2i)+b \end{cases}$

ou encore tel que : $\begin{cases} b = -1+i-a \\ 2 = a(2-2i)-1+i-a \end{cases}$

On déduit de la seconde équation que : $a = \dfrac{3-i}{1-2i} = \dfrac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{3+6i-i+2}{1^2+2^2}$

Finalement $a = 1 + i$ et $b = -2$. Donc il existe une unique similitude indirecte f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$, elle a pour écriture complexe : $z' = (1 + i)\,\bar{z} - 2$.

2) a) $z_{C'} = (1 + i)\dfrac{\overline{7}}{2} - 2 = (1 + i)\dfrac{7}{2} - 2 = \dfrac{7}{2} + \dfrac{7}{2}i - 2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}i$

b) On calcule AC et BC : $AC = \left|\dfrac{7}{2} - 1\right| = \dfrac{5}{2}$; $BC = \left|\dfrac{7}{2} - 2 - 2i\right| = \left|\dfrac{3}{2} - 2i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4}+4} = \dfrac{5}{2}$.

$AC = BC$ donc le triangle ABC est isocèle en C.

Comme une similitude conserve le rapport des distances, on a : $\dfrac{A'C'}{B'C'} = \dfrac{AC}{BC} = 1$, donc A'C' = B'C', le triangle A'B'C' est isocèle en C'.

CHAPITRE 4

CONIQUES

Objectif 1

PARABOLE : Déterminer les éléments caractéristiques d'une parabole définie à l'aide d'une équation réduite

ENONCES

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, les paraboles P_1, P_2 et P_3 d'équations respectives : $y^2 = 6x$, $y^2 = -4x$ et $x^2 = \frac{1}{2}y$.

Déterminer les éléments caractéristiques (paramètre, foyer et directrice) de chacune de ces paraboles.

SAVOIR

Dans un repère orthonormé $R = (O,\vec{i},\vec{j})$ du plan,

☞ L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 = 2kx$ $(k \in \mathbb{R}^*)$ est la parabole de foyer $F\left(\frac{k}{2},0\right)$, de directrice D : $x = -\frac{k}{2}$, de paramètre $p = |k|$ et de sommet O.

$y^2 = 2px$ est l'équation réduite de P.

☞ Une courbe (Γ) ayant pour équation dans R : $(x^2 = 2ky ; k \in \mathbb{R}^*)$ est une parabole, son foyer est le point $F\left(0,\frac{k}{2}\right)$ et sa directrice est la droite D : $y = -\frac{k}{2}$

Le point O est le sommet de cette parabole, la droite $(O,\vec{j})$ est son axe.

Le réel positif $p = |k|$ est son paramètre.

SOLUTIONS

Equation	Paramètre	Foyer	Directrice
$Y^2 = 6x = 2\times 3x$	$P = 3$	$F\left(\frac{3}{2},0\right)$	$D : x = -\frac{3}{2}$
$Y^2 = -4x = 2\times(-2)x$	$P = \lvert -2\rvert = 2$	$F(-1, 0)$	$D : x = 1$
$X^2 = \frac{1}{2}y = 2\times\frac{1}{4}y$	$P = \frac{1}{4}$	$F\left(0,\frac{1}{8}\right)$	$D : y = -\frac{1}{8}$

Objectif 2

PARABOLE : Reconnaître une parabole définie par son équation cartésienne non réduite et donner ses éléments caractéristiques

ENONCES

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (Γ) dont une équation cartésienne est : $y^2 + 2y - 4x + 3 = 0$.
Montrer que (Γ) est une parabole. Déterminer les coordonnées de son foyer F et donner une équation de sa directrice.

SAVOIR

- Ramener l'équation à une équation du type $(y-b)^2 = 2k(x-a)^2$.
- effectuer le changement de variables : $Y = y - b$ et $X = x - a$, l'équation devient : $Y^2 = 2kX$ dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$ où S(a, b) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- Déterminer le foyer et la directrice dans le nouveau repère $(S,\vec{i},\vec{j})$ puis dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

(Le paramètre ne dépend pas du repère choisi)

SOLUTIONS

$y^2 + 2y - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$
On pose $Y = y + 1$ et $X = x - \frac{1}{2}$ et on considère $s\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

Une équation de (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est : $(y+1)^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Une équation de (Γ) dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$ est : $Y^2 = 4X = 2 \times 2X$

Cette dernière relation montre que (Γ) est une parabole de sommet S et de paramètre 2.

- Coordonnées du foyer F de (Γ) dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$: (1, 0).
- Coordonnées du foyer F de (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$.
- Une équation de la directrice (D) de (Γ) dans le repère $(S,\vec{i},\vec{j})$: $X = -1$.
- Une équation de (D) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: $x = -\frac{1}{2}$

Objectif 3

PARABOLE : * Donner, dans un repère orthonormé, l'équation réduite d'une parabole connaissant son foyer et son sommet
* Former une équation de la tangente en un point d'une parabole définie à l'aide de son équation réduite

ENONCES

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit (P) la parabole de sommet O et de foyer F(3,0).

a) Donner l'équation réduite de (P). Tracer (P).

b) Soit M le point de (P) d'abscisse $\frac{3}{4}$ et d'ordonnée positive. Former une équation de la tangente en M à (P).

SAVOIR

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.

☞ P est une parabole d'équation $y^2 = 2kx$; $k \in IR^*$

P admet en chacun de ses points $M_0(x_0,y_0)$ une tangente (T) ayant pour équation cartésienne dans le même repère : $yy_0 = k(x+x_0)$

☞ Si la parabole P a pour équation cartésienne dans $(O,\vec{i},\vec{j})$: $(x^2 = 2ky ; k \in IR^*)$ alors la tangente (T) à P en un point $M_0(x_0,y_0)$ de P a pour équation cartésienne dans le même repère : $xx_0 = k(y+y_0)$

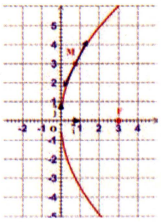
SOLUTIONS

a) (P) : $y^2 = 2kx$ et $F\left(\frac{k}{2},0\right) \Rightarrow \frac{k}{2} = 3 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow y^2 = 12x$

b) Soit $M\left(\frac{3}{4},y\right) \in (P) \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

or $y > 0 \Rightarrow y = 3$.

$(T) : 3y = 6\left(x+\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow y = 2x+\frac{3}{2}$



Objectif 1

HYPERBOLE : Déterminer les éléments caractéristiques d'une hyperbole définie à l'aide d'une équation réduite

ENONCES

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les hyperboles d'équations réduites respectives : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$; $\frac{x^2}{4}-y^2=-1$

Déterminer les foyers, les sommets et les asymptotes de chacune des hyperboles considérées

SAVOIR

☞ L'ensemble des points M(*x*, y) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan tels que $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$ et $b>0$) est une hyperbole de foyers F(c, 0) et F'(-c, 0), de directrice D : $x=\frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e=\frac{c}{a}$ et de sommets S(*a*, 0) et S'(-*a*, 0) avec $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

☞ La courbe H : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan est une hyperbole de centre O, de foyers F(0, c) et f'(0, -c), de directrice D : $y=\frac{b^2}{c}$, d'excentricité $e=\frac{c}{b}$ et de sommets S(0, b) et S'(0, -b) avec $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

H admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$ dans le même repère

SOLUTIONS

Equation	Foyers	Sommets	Asymptotes
$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{14}$	$F(\sqrt{14},0)$ et $F'(-\sqrt{14},0)$	$S(3,0)$ et $S'(-3,0)$	$D: y=\frac{\sqrt{5}}{3}x$ et $D': y=-\frac{\sqrt{5}}{3}x$
$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{5}=1$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{14}$	$F(\sqrt{14},0)$ et $F'(-\sqrt{14},0)$	$S(3,0)$ et $S'(-3,0)$	$D: y=\frac{\sqrt{5}}{3}x$ et $D': y=-\frac{\sqrt{5}}{3}x$
$\frac{x^2}{4}-y^2=-1 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$	$F(0,\sqrt{5})$ et $F'(0,-\sqrt{5})$	$S(0,1)$ et $S'(0,-1)$	$D: y=\frac{1}{2}x$ et $D': y=-\frac{1}{2}x$

Objectif 2

HYPERBOLE : Reconnaître une hyperbole définie par son équation cartésienne non réduite et donner ses éléments caractéristiques

ENONCES

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (Γ) dont une équation cartésienne est : $9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$.

Montrer que (Γ) est une hyperbole dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et les asymptotes.

SAVOIR

- Ramener l'équation à une équation du type : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$
- effectuer le changement de variables : $Y = y - \beta$ et $X = x - \alpha$, l'équation devient : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ où $\Omega(\alpha, \beta)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
- Déterminer les foyers, les sommets et les asymptotes dans le nouveau repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ puis dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

SOLUTIONS

$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow 9(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

On pose $X = x - 2$ et $Y = y + 1$ et on considère $\Omega(2, -1)$

(Γ) a pour équation dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{9} = 1 \Rightarrow$ (Γ) est une hyperbole de centre Ω.

- Coordonnées des foyers de (Γ) dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $F(\sqrt{13},0)$ et $F'(-\sqrt{13},0)$
- Coordonnées des foyers de (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: $F(2+\sqrt{13},-1)$ et $F'(2-\sqrt{13},-1)$
- Coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: S (2, 0) et S' (-2, 0).

Coordonnées des sommets de (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: S (4, -1) et S' (0, -1).

- Equations des asymptotes de (Γ) dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$: $D : Y = \frac{3}{2}X$ et $D' : Y = -\frac{3}{2}X$
- Equations des asymptotes de (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: $D : y = \frac{3}{2}x - 4$ et $D' : y = -\frac{3}{2}x + 2$.

Objectif 3

HYPERBOLE : Former une équation de la tangente en un point d'une hyperbole définie à l'aide de son équation réduite

ENONCES

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ l'hyperbole (H) d'équation réduite : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$.

On désigne par K le point de (H) d'abscisse -3 et d'ordonnée négative.

a) Donner une équation cartésienne de la tangente à (H) en K.

b) Donner une équation cartésienne de la normale à (H) en K.

SAVOIR

☞ Soit H : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

La tangente à H en un point $M_0(x_0,y_0)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

☞ Si H : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

La tangente à H en un point $M_0(x_0,y_0)$ a pour équation $-\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

On appelle normale à (H) en K la perpendiculaire à la tangente en K à (H).

SOLUTIONS

K $(-3, y) \in$ (H) : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1 \Leftrightarrow y^2=25\times\left(\frac{9}{4}-1\right)=\frac{125}{4}$, or $y<0 \Rightarrow y=-\frac{5\sqrt{5}}{2}$

a) (T) : $\frac{-3x}{4}+\frac{\frac{5\sqrt{5}}{2}y}{25}=1 \Leftrightarrow \frac{-3x}{4}+\frac{y\sqrt{5}}{10}=1 \Leftrightarrow 15x-2y\sqrt{5}+20=0$.

b) La normale $\Delta \perp$ (T) en K a pour équation : $K\left(-3,-\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)\in\Delta$

c) $2x\sqrt{5}+15y+c=0$

$\Rightarrow -6\sqrt{5}-\frac{75\sqrt{5}}{2}+c=0 \Rightarrow c=\frac{87\sqrt{5}}{2}$, d'où $\Delta : 4x\sqrt{5}+30y+87\sqrt{5}=0$

Objectif 4

HYPERBOLE : Former une équation de la tangente en un point d'une hyperbole définie à l'aide d'une équation non réduite

ENONCES

On reprend l'exemple de l'objectif 2.
Soit M un point de (Γ) d'ordonnée 2 et d'abscisse positive.
Donner, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, une équation cartésienne de la tangente à (Γ) en M.

SAVOIR

- Déterminer les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ puis dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$
- Ecrire l'équation de la tangente dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ puis dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

SOLUTIONS

$9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

$M(x, 2) \in (\Gamma) \Leftrightarrow (x-2)^2 = 8 \Leftrightarrow x - 2 = \pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}$,

or $x > 0 \Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{2}$.

- $M\left(2+2\sqrt{2},2\right)_{(O,\vec{i},\vec{j})}$, or $X = x - 2$ et $Y = y + 1 \Rightarrow M\left(2\sqrt{2},3\right)_{(\Omega,\vec{i},\vec{j})}$
- Equation de la tangente à (Γ) en M dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$:

$\frac{2\sqrt{2}\,X}{4} - \frac{3Y}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\,X}{2} - \frac{Y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{2}X - 2Y - 6 = 0$

Equation de la tangente à (Γ) en M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$:

$3\sqrt{2}X - 2Y - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2}(x-2) - 2(y+1) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{2}x - 2y - 6\sqrt{2} - 8 = 0$

Objectif 5

HYPERBOLE : Ecrire une équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

ENONCES

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ l'hyperbole (H) d'équation réduite : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

Donner une équation de (H) rapportée à ses asymptotes.

SAVOIR

Théorème : Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a pour équation XY = k où k est un réel non nul.

☞ Déterminer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ directeurs respectifs de chacune des asymptotes de (H) (non forcement orthonormés).

☞ Ecrire l'équation de (H) dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$

SOLUTIONS

(H) : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites $D: y=\frac{3}{4}x$ et $D': y=-\frac{3}{4}x$

$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de D et D'.

(H) a pour équation XY = k dans le repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$)

Soit $M(x, y)_{(O,\vec{i},\vec{j})}$ et $M(X, Y)_{(O,\vec{u},\vec{v})}$ $\Rightarrow \begin{cases} x=4(X+Y) \\ y=3(X-Y) \end{cases}$

(H) : $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow XY=\frac{1}{4}$

Objectif 1

ELLIPSE : Déterminer les éléments caractéristiques d'une ellipse définie à l'aide d'une équation réduite

ENONCES

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ l'ellipse (E) d'équation : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

Déterminer les coordonnées des foyers et les sommets de (E).

SAVOIR

☞ L'ensemble des points M(x, y) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan tels que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a > b > 0$) est une ellipse de foyer F(c, 0), de directrice D : $x=\frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e=\frac{c}{a}$, de sommets principaux S(a, 0) et S'(-a, 0) et de sommets secondaires s(0, b) et s'(0, -b) avec $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

☞ La courbe E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan avec $0 < a < b$ est une ellipse de centre O, de foyer F(0, c), de directrice D : $y=\frac{b^2}{c}$, d'excentricité $e=\frac{c}{b}$, de sommets principaux S(0, b) et S'(0, - b) et de sommets secondaires s(a, 0) et s'(-a, 0) avec $c=\sqrt{b^2-a^2}$.

SOLUTIONS

Equation	Foyers	Sommets
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$	$F(0,\sqrt{7})$ et	Sommets principaux S(0,4) et S'(0, -4)
$a=3<b=4$	$F'(0,-\sqrt{7})$	Sommets secondaires S(3, 0) et s'(-3, 0)

Objectif 2

ELLIPSE : Reconnaître une ellipse définie par son équation cartésienne non réduite et donner ses éléments caractéristiques

ENONCES

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (Γ) dont une équation cartésienne est : $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$.

a) Montrer que (Γ) est une ellipse.

b) Préciser les axes, les sommets et les foyers de (Γ).

SAVOIR

- Ramener l'équation à une équation du type : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$
- effectuer le changement de variables : $Y = y - \beta$ et $X = x - \alpha$, l'équation devient : $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ où $\Omega(\alpha, \beta)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
- Déterminer les foyers et les sommets dans le nouveau repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ puis dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

SOLUTIONS

a) $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0 \Leftrightarrow 4(x-3)^2 + 9(y-2)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

On considère $\Omega(3,2)_{(O,\vec{i},\vec{j})}$, $M(x,y)_{(O,\vec{i},\vec{j})}$ et $M(X,Y)_{(\Omega,\vec{i},\vec{j})}$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1 \Rightarrow$ (Γ) est une ellipse de centre Ω.

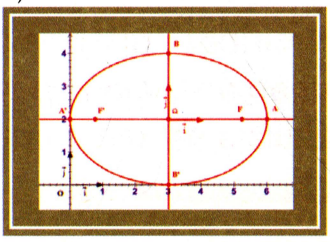
b) L'axe focal de (Γ) est $(\Omega,\vec{i}): y = 2$, l'axe non focal est $(\Omega,\vec{j}): x = 3$

Les sommets principaux sont les points A et A' de coordonnées (3, 0) et (-3, 0) dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

Les sommets secondaires sont les points B et B' de coordonnées (0, 2) et (0, -2)dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$.

Les foyers sont les points F et F' de coordonnées $(\sqrt{5},0)$ et $(-\sqrt{5},0)$ dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$

$(\sqrt{5} = \sqrt{a^2 - b^2} = c)$



Objectif 3

ELLIPSE : Former une équation de la tangente en un point d'une ellipse définie à l'aide de son équation réduite

ENONCES

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ l'ellipse (E) d'équation réduite : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

On désigne par K le point de (E) d'abscisse 1 et d'ordonnée positive.
Donner une équation cartésienne de la tangente à (E) en K.

SAVOIR

☞ Soit E : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ***a > 0 et b > 0***

La tangente à E en un point $M_0(x_0,y_0)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$ dans le même repère.

☞ On appelle normale à (H) en K la perpendiculaire à la tangente en K à (H).

SOLUTIONS

K(1,y) $\in$ (E) : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow y^2=4\left(1-\frac{1}{16}\right)=\frac{15}{4}$, or y > 0 $\Rightarrow y=\frac{\sqrt{15}}{2}$

(T) : $\frac{x}{16}+\frac{y\times\frac{\sqrt{15}}{4}}{4}=1 \Leftrightarrow x+y\sqrt{15}-16=0$

Objectif 4

ELLIPSE : Former une équation de la tangente en un point d'une ellipse définie à l'aide d'une équation non réduite

ENONCES

On reprend l'exemple de l'objectif 2.
Soit M un point de (Γ) d'abscisse 2 et d'ordonnée inférieure à 2.
Donner, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, une équation cartésienne de la tangente à (Γ) en M.

SAVOIR

- Déterminer les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ puis dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$
- Ecrire l'équation de la tangente dans le repère $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$ puis dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

SOLUTIONS

$M(2, y) \in (\Gamma) : \frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1 \Leftrightarrow (y-2)^2=4\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{32}{9} \Leftrightarrow y-2=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow y=2\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$,

or $y<2 \Rightarrow y=2-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$M\left(-1,-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)_{(\Omega,\vec{i},\vec{j})} \Rightarrow (\Gamma) : -\frac{X}{9}-\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}Y}{4}=1 \Leftrightarrow -X-3\sqrt{2}Y=9 \Leftrightarrow X+3\sqrt{2}Y-9=0$

$\Leftrightarrow x-3+3\sqrt{2}(y-2)-9=0 \Leftrightarrow x+3\sqrt{2}y-12-6\sqrt{2}=0$

CHAPITRE 5

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Objectif 1

Remettre en jeu les relations d'orthogonalité dans l'espace

ENONCES

Dans un repère orthonormé dans l'espace, on considère les points A(1, 1, 3) ; B $\left(\sqrt{2}+1,0,2\right)$ et C$\left(\sqrt{2}+1,2,2\right)$.

Calculer AB, AC et l'angle $\widehat{CAB}$.
Que peut-on dire du triangle ABC ?

SAVOIR

☞ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
Soient A, B et C trois points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
Alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\widehat{BAC}$

☞ L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\left(x,y,z\right)$ et $\left(x',y',z'\right)$ dans la base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$;
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
- Pour tous points $M\left(x,y,z\right)$ et $M'\left(x',y',z'\right)$, $MM'=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$

SOLUTIONS

$\overrightarrow{AB}\left(\sqrt{2},-1,-1\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(\sqrt{2},1,-1\right)$.

D'où $AB^2=AC^2=4$, $\boldsymbol{AB=AC=2}$, puis $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$.

Comme $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{CAB}$, nous obtenons $\cos\widehat{CAB}=\frac{1}{2}$; soit $\widehat{CAB}=\frac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est donc équilatéral.

Objectif 2

Utiliser la notion du produit vectoriel pour montrer que des points de l'espace sont alignés ou coplanaires

ENONCES

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. A(1, 1, 1) ; B(3, 4, -3) ; C(2, -3, 6) et D(2, 19, -22).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C sont – ils alignés ?
2. Calculer le produit scalaire $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$. Les points A, B, C et D sont – ils coplanaires ?

SAVOIR

☞ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini ainsi :

• Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$; • Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ (direction) ;
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe (sens) ;
- $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$ (norme).

☞ Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et le réel α :

• $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$; • $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$; • $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

☞ Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormée directe.

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans cette base sont telles que :

Si $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{v}(x',y',z')$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v}(yz'-zy', zx'-xz', xy'-yx')$

☞ Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est nul si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

De ce fait A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

☞ L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

• $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = \det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

• $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.

SOLUTIONS

$\overrightarrow{AB}(2,3,-4)$, $\overrightarrow{AC}(1,-4,5)$ et $\overrightarrow{AD}(1,18,-23)$

1. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-1,-14,-11) \neq \vec{0} \Rightarrow$ A, B et C ne sont pas alignés.
2. $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = -1 - 252 + 253 = 0 \Rightarrow$ A, B, C et D sont coplanaires.

Objectif 3

Mettre en œuvre la définition du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace pour déterminer l'équation cartésienne d'un plan

ENONCES

Dans un repère orthonormé dans l'espace, on considère les points $A(2, 1, -1)$; $B(0,1,1)$ et $C(3,0,-2)$.

Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC).

SAVOIR

- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).
- Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

SOLUTIONS

Nous avons $\overrightarrow{AB}(-2,0,2)$ et $\overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$, d'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2,0,2)$. Ainsi $\vec{n}(1,0,1)$ est normal au plan (ABC). Avec $M(x,y,z)$, la condition $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ s'écrit alors $x + z - 1 = 0$ (équation du plan (ABC)).

Objectif 4

Appliquer la notion du produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace pour calculer des aires, des volumes et des distances

ENONCES

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(-1, 4, 5) ; B(0, 1, 1) ; C(1, 4, 0) et D(-3, 5, 0).

1. Calculer l'aire du triangle BCD
2. Calculer le volume du tétraèdre ABCD puis la distance de A au plan (BCD).

SAVOIR

- Lorsque ABC est un triangle, on a établit en deuxième que l'aire S de ABC est donné par : $S=\frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$
  - Ce qui s'écrit : $S=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left|\sin\widehat{BAC}\right| \Rightarrow \text{Aire}(ABC)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$
  - De même en présence d'un parallélogramme ABCD, on a : Aire (ABCD) $=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$.
- Le volume d'un tétraèdre ABCD est $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BA}\right|$
- La distance d'un point A à la droite $D\left(B,\vec{u}\right)$ est $d=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

SOLUTIONS

1. $\overrightarrow{BC}(1,3,-1)$ et $\overrightarrow{BD}(-3,4,-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}(1,4,13) \Rightarrow \text{Aire}(BCD)=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|=\frac{\sqrt{186}}{2}$

2. Le volume de ABCD est $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right)\cdot\overrightarrow{BA}\right|$ $\overrightarrow{BA}(-1,3,4) \Rightarrow V=\frac{63}{6}=\frac{21}{2}$

On peut considérer le volume comme étant $V=\frac{1}{3}\times Aire(BCD)\times d(A,(BCD)) \Rightarrow d(A,(BCD))=\frac{21\sqrt{186}}{62}$

NB : si $A\left(x_0,y_0,z_0\right)$ et P : $ax+by+cz+d=0$ alors $d(A,P)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Cherchons l'équation du plan (BCD) : $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}(1,4,13)$ vecteur normal

- (BCD) : x + 4y + 13z + d = 0 et B (0, 1, 1) ∈ (BCD) ⇒ d = - 17

⇒ (BCD) : x + 14y + 13z − 17 = 0 A(-1, 4, 5) ⇒ $d(A,(BCD))=\frac{\left|-1+4\times4+13\times5-17\right|}{\sqrt{1^2+4^2+13^2}}=\frac{63}{\sqrt{186}}=\frac{21\sqrt{186}}{62}$

Objectif 5

Déterminer l'équation d'une sphère en utilisant sa position relative par rapport à un plan donné

ENONCES

Dans un repère orthonormé dans l'espace déterminer l'équation de la sphère de centre A(1, - 2, 4) et tangente au plan d'équation $x + y + z - 2 = 0$.

SAVOIR

Soit S une sphère de centre A et de rayon R. soit P un plan et H le projeté orthogonal de A sur P. On a :

- $P \cap S = \varnothing$ si $AH > R$ (P et S sont dits disjoints)
- $P \cap S = \{H\}$ si $AH = R$ (P est tangent à S en H)

$P \cap S = \zeta_{\left(H, \sqrt{R^2 - AH^2}\right)}$ si $AH < R$ (P et S sont sécants suivant un cercle ζ)

SOLUTIONS

$$d(A, P) = \frac{|1 - 2 - 4 - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

La sphère et le plan sont tangents si et seulement si $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$

Une équation de la sphère est $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = \frac{49}{3}$

Objectif 6

* Reconnaitre une translation de l'espace

*Déterminer l'expression analytique d'une translation

* Déterminer l'image d'un plan par une translation

ENONCES

A, B et C sont trois points de l'espace.

On considère l'application f qui à tout point M de l'espace associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$

1) Démontrer que f est une translation dont on précisera le vecteur

2) On donne A(- 1, 2, 1) ; B(1, 1, - 3) et C(3, 3, - 1)

a) Déterminer l'expression analytique de la translation f b) Montrer qur AB = AC

c) Déterminer l'image par f du plan médiateur du segment [BC]

SAVOIR

☞ Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est appelée translation de vecteur $\vec{u}$ et notée $t_{\vec{u}}$

☞ L'image d'un plan par une translation est un plan qui lui est parallèle

☞ L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace. Si M(x, y, z) et M'(x', y', z') son image par $t_{\vec{u}}$ alors $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

SOLUTIONS

1) $f(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) + \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow$ f est la translation de vecteur $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$

2) a) $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ Donc l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x' = x - 6 \\ y' = y \\ z' = z + 6 \end{cases}$

b) On vérifie que $AB = AC = \sqrt{21}$

c) Soit P le plan médiateur de [BC]

$AB = AC \Rightarrow A \in P$ f(P) est le paln P' parallèle à P passant par f(A) = A'(- 7, 2, 7)

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P donc à P' $\Rightarrow$ P' : x + y + z – 2 = 0

NB : P' = P car le vecteur de la translation est directeur du plan P

Objectif 7

* Reconnaitre une homothétie de l'espace
* Déterminer l'expression analytique d'une homothétie de l'espace

ENONCES

A, B et C sont des points de l'espace et G le point tel que $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

1) Montrer que l'application f qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ est une homothétie de centre G dont on précisera le rapport

2) On donne A(- 1, 2, 1) ; B(1, 1, - 3) et C(2, 3, - 1)

a) Déterminer les coordonnées du point G b) Déterminer l'expression analytique de f

SAVOIR

☞ Soit I un point de l'espace et k un réel non nul. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$ est appelée homothétie de centre I et de rapport k, elle est notée $h_{(I,k)}$

☞ L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

- Si $I(a,b,c)$ et k un réel non nul différent de 1, $h_{(I,k)}(M)=M' \Leftrightarrow \begin{cases} x'=kx+(1-k)a \\ y'=ky+(1-k)b \\ z'=kz+(1-k)c \end{cases}$
- Inversement : l'application qui à tout point M(x, y, z) associe le point M'(x', y', z')

tel que : $\begin{cases} x'=kx+\alpha \\ y'=ky+\beta \\ z'=kz+\gamma \end{cases}$, $k \neq 1$ est l'homothétie de centre $I\left(\frac{\alpha}{1-k},\frac{\beta}{1-k},\frac{\gamma}{1-k}\right)$ et de rapport k.

SOLUTIONS

1) $f(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}=-2\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM'}=3\overrightarrow{GM}$

$\Rightarrow f=h_{(G,3)}$

2) a) $G\left(\frac{-2-1-6}{-2},\frac{4-1-9}{-2},\frac{2+3+3}{-2}\right) \Leftrightarrow G\left(\frac{9}{2},3,-4\right)$

b) l'expression analytique de f est : $\begin{cases} x'=3x-9 \\ y'=3y-6 \\ z'=3z+8 \end{cases}$

Utiliser la calculatrice (casio fx 570 ES ou fx 570 ES plus ou fx 991 ES plus)

Le mode VECTOR MODE SETUP 8

VECTOR comme «***vecteur***» est le mode dans lequel il faut mettre la calculatrice pour réaliser des calculs vectoriels. Il s'obtient en pressant successivement la touche MODE SETUP et la touche 8.

Exemple

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

❑***Enregistrement de le vecteur*** $\overrightarrow{AB}$

MODE SETUP 8 1 1 1 = 2 = 3 = AC

❑***Enregistrement de le vecteur*** $\overrightarrow{BC}$

SHIFT 5 1 2 1 4 = 5 = 6 = AC

❑***Pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs***

☞On trouve $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

SHIFT 5 3 × SHIFT 5 4 =

Le mode MATRIX MODE SETUP 6

MATRIX comme « ***calculs matriciels*** » est le mode dans lequel il faut mettre la calculatrice pour réaliser des calculs matriciels. Il s'obtient en pressant successivement la touche MODE SETUP et la touche 5.

Déterminant

Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$dét(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=-3$

❑***Enregistrement de matrice A***

MODE SETUP 4 1 1 MAT A 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 = 0 = 1 = 3 = 1 = 1 = CONST 7 = 2 = 1 = AC

❑***Pour calculer déterminant de A***

☞On trouve ***det(A)*** = –3

SHIFT 4 7 SHIFT 4 3 =

CHAPITRE 6

ARITHMÉTIQUE

Objectif 1

Manipuler la notion de divisibilité dans $\mathbb{Z}$

ENONCES

Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $n-1$ divise $2n+5$

SAVOIR

Soit a un entier non nul et b un entier. a divise b si et seulement si $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$

SOLUTIONS

n étant un entier différent de 1 $(n-1 \neq 0)$. En remarquant que $\frac{2n+5}{n-1} = \frac{2(n-1)+7}{n-1} = 2+\frac{7}{n-1}$

alors $n-1$ divise $2n+5$ si et seulement si $n-1$ divise 7, soit $n-1 \in \{-7,-1,1,7\}$ et donc $n \in \{-6,0,2,8\}$

Objectif 2

Démontrer qu'un entier est multiple d'un autre

ENONCES

1) Démontrer que, pour tout entier n, l'entier $n^3 - n$ est un multiple de 6

2) Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $2^{2n} - 1$ est un multiple de 3

SAVOIR

☞ Soient a et b deux entiers relatifs non nuls premiers entre eux (leur PGCD est égale à 1) et soit n un entier naturel. Si n est divisible par a et par b, alors n est divisible par le produit ab.

☞ Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul. $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$

☞ Soit $n \geq 1$ un entier et a, $b \in \mathbb{Z}$, on dit que a est congru à b modulo n s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que
$a = b + kn$; on écrit alors $a \equiv b\ [n]$ ou $a = b\ (\text{mod } n)$ ou $a \equiv_n b$.

☞ si $a \equiv b[n]$ alors $a^m \equiv b^m[n]$ pour tout entier $m > 0$.

SOLUTIONS

1) Pourtout entier n, $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$

$n-1$, n et $n+1$ étant trois entiers consécutifs, il y a nécessairement parmi eux un entier pair et un multiple de 3.

2 et 3 étant premiers entre eux, le produit $(n-1)n(n+1)$ est un multiple de 2×3 c'est-à-dire 6.

2) Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$: $2^{2n} - 1 = (2^2)^n - 1 = 4^n - 1 = (4-1)\sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-1-k}\,1^k = 3\sum_{k=0}^{n-1} 4^{n-1-k}$

$2^{2n} - 1$ est donc bien un multiple de 3.

Autrement :

$2^2 = 4 \equiv 1[3] \Rightarrow (2^2)^n \equiv 1^n[3] \Rightarrow 2^{2n} \equiv 1[3] \Rightarrow 2^{2n} - 1 \equiv 0[3]$

Objectif 3

Utiliser la division euclidienne dans pour résoudre un problème

ENONCES

Soit n un entier naturel au moins égal à 3. Démontrer qu'il est impossible que l'entier n^4-2 soit un multiple de n^2-2

SAVOIR

Division euclidienne : Soit a un entier relatif et b un entier relatif non nul
Il existe un unique couple $(q;r)$, $q\in\mathbb{Z}$ et $r\in\mathbb{N}$ tel que : $a=bq+r$ et $r<|b|$

SOLUTIONS

Effectuons la division euclidienne de :
n^4-2 par n^2-2 : $(n^4-2)=(n^2-2)(n^2+2)+2$ *et* $2<n^2-2=|n^2-2|$
puisque n est au moins égal à 3. La division n'a jamais un reste nul, ce qui prouve le résultat annoncé.

Objectif 4

Utiliser la relation de congruence dans $\mathbb{Z}$

ENONCES

Soit n un entier naturel ; démontrer que $2^{4n}-3^n$ est divisible par 13.

SAVOIR

On dit que a ≡ r (mod b) ou encore $a\equiv r[b]$ si le reste de la division euclidienne de a par b est r
Soit n un entier naturel, $n\geq 2$, et a et a' des entiers relatifs
Si $a\equiv a'[n]$, alors : Pour tout entier naturel p, $a^p\equiv a'^p[n]$

SOLUTIONS

$2^4\equiv 16[13]\equiv 3[13]$ donc $(2^4)^n\equiv 3^n[13]$ et donc $2^{4n}-3^n\equiv 0[13]$

Objectif 5 — Déterminer le PGCD de deux entiers

ENONCES

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le PGCD des nombres 1 764 et 3 456

SAVOIR

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
On définit la suite r_n d'entiers naturels de la façon suivante :

$r_0 = b$; r_1 est le reste de la division euclidienne de a par b

Pour $n \geq 1$:

si $r_n = 0$ alors $r_{n+1} = 0$

si $r_n \neq 0$ alors r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de r_{n-1} par r_n

Alors il existe un entier n_0 tel que $r_{n_0} \neq 0$ et pour tout $n > n_0$, $r_n = 0$

On a $PGCD\ (a\ ;\ b) = r_{n_0}$

SOLUTIONS

	1	1	27
3 4 6 5	17 64	17 01	63
1 7 0 1	63	0	

← quotients

← dividendes et diviseurs

Ainsi : $PGCD\ (3465\ ,\ 1764) = 63$

Objectif 6

Déterminer le PGCD de trois entiers

ENONCES

Trouver le PGCD des entiers donnés 12 ; 1 347 ; 541

SAVOIR

$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

SOLUTIONS

On sait que 1 347 est divisible par 3 et pas par 2 ; donc PGCD $(12,1347) = 3$.

Comme 541 n'est pas divisible par 3, PGCD $(12, 1347, 541) = 1$

Objectif 7

Résoudre une équation de congruence

ENONCES

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod 6$

SAVOIR

☞ Soit $n \geq 1$ entier

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, il existe un unique entier $r \in \{0, 1, \ldots\ldots, n-1\}$ tel que $a \equiv r\ [n]$; on dit que r est le reste modulo n de a.

☞ Soient a, b, c et d quatre entiers et $n \in$ IN*

- ✓ $a \equiv a[n]$
- ✓ si $a \equiv b[n]$ alors $b \equiv a[n]$
- ✓ si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$.
- ✓ si $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $a + c \equiv b + d\ [n]$ et $a \times c \equiv b \times d\ [n]$
- ✓ si $a \equiv b[n]$ alors $ha \equiv hb[n]$ pour tout entier h

si $a \equiv b[n]$ alors $a^m \equiv b^m[n]$ pour tout entier $m > 0$.

SOLUTIONS

$x \equiv \ldots\ldots[6]$	0	1	2	3	4	5
$x^2 \equiv \ldots\ldots[6]$	0	1	4	3	4	1
$x^2 - x + 4 \equiv \ldots\ldots[6]$	4	4	0	4	4	0

Ainsi $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod 6 \Leftrightarrow x \equiv 2[6]$ ou $x \equiv 5[6]$

Objectif 8

Résoudre un système à deux inconnues entiers faisant intervenir le PGCD et le PPCM

ENONCES

1) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} x+y=600 \\ PGCD(x\,;y)=50 \end{cases}$

2) Trouver tous les entiers naturels a et b tels que $a<b$ dont le PGCD d et le PPCM m vérifient les égalités suivantes : $a+b=8$ et $m=7d$

SAVOIR

- Soit m le PPCM de deux entiers naturels x et y, dont le PGCD est d. On a alors : $md=xy$ donc $md=d^2x'y'.soit\ \ m=dx'y'$
- Soit d le PGCD de deux entiers naturel x et y. Il existe alors deux entiers naturels x' et y' premiers entre eux tels que $x=dx'$ et $y=dy'$

SOLUTIONS

1) Nous obtenons $\begin{cases} 50(x'+y')=600 \\ d=50 \end{cases}$ donc nous avons $x'+y'=12$ .les couples (x',y') possibles sont donc $(1,11),(5,7),(7,5)\ et\ (11,1)$. Les couples solutions du système sont donc $(50,550),(250,350),(550,50)$

2) La résolution des systèmes proposés repose sur le fait que $md=ab$ et $a=da'$ et $b=db'$, avec a' et b' premier entre eux, donc $m=da'b'$, nous somme conduit à : $\begin{cases} d(a'+b')=8 \\ da'b'=7d \end{cases}$

Nous obtenons : $\begin{cases} d(a'+b')=8 \\ a'b'=7 \end{cases}$

Nous trouvons : $a'=1\ et\ b'=7$ donc $(a,b)=(1,7)$

Objectif 9

Résoudre dans $\mathbb{Z}$, une équation diophantienne ou une équation de Bézout

ENONCES

1) En utilisant la solution particulière $(1;2)$, trouver tous les couples $(x;y)$ d'entiers relatifs tel que $17x-5y=7$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+16y=1$ (vous pouvez d'abord trouver une solution évidente).

SAVOIR

Théorème de Gauss : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls et c un entier relatif.
Si a divise b c et si a est premier avec b, alors a divise c.

SOLUTIONS

1)

Posons $\begin{cases} 17x-5y=7 \\ 17\times1-5\times2=7 \end{cases}$

Nous en déduisons, par soustraction $17(x-1)-5(y-2)=0$ donc $17(x-1)=5(y-2)$

5 et 17 sont premiers entre eux ; 5 divise $17(x-1)$ donc 5 divise $(x-1)$ (Théorème de Gauss)

Ainsi $x-1=5k$ avec $k\in\mathbb{Z}$. En remplaçant $x-1$ par $5k$ dans la dernière équation on obtient $y-2=17k$ donc $x=5k+1$ et $y=17k+2$.

Vérification : $17\times(5k+1)-5\times(17k+2)=85k+17-85k-10=7$ Donc ces nombres conviennent.

Les solutions (x,y) sont de la forme $(5k+1,17k+2)$, k étant un entier relatif quelconque.

2) Le couple $(-3,1)$ est solution.

Posons $\begin{cases} 5x-16y=1 \\ 5\times(-3)+16\times1=1 \end{cases}$

Par soustraction : $5(x+3)+16(y-1)=0$ donc $5(x+3)=16(1-y)$

Le raisonnement de l'énoncé précédent s'applique, puisque 16 et 5 sont premiers entre eux.

Les solutions (x,y) sont de la forme $(16k-3,1-5k)$, k étant un entier relatif quelconque.

CHAPITRE 7

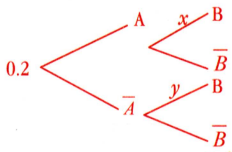
PROBABILITÉS

Objectif 1

Interpréter un arbre de probabilités

ENONCES

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous où A et B sont deux événements, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs événements contraires ;



1. a) Que représente les nombres x et y ?
   b) Compléter cet arbre.
2. Exprimer p(B) en fonction de x et y.
3. Quelle relation doivent vérifier x et y pour que A et B soient indépendants.

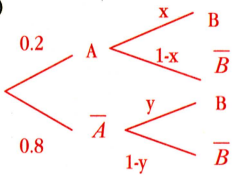
SAVOIR

- Pour tout événement A, $\boxed{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$
- $p(B) = p(A) \times p(B|A) + p(\overline{A}) \times p(B|\overline{A})$, c'est le principe de probabilité totale.
- A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.
  - A et B sont ***indépendants*** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
  - A et B sont ***indépendants*** si et seulement si $p(A|B) = p(A)$ ou $p(B|A) = p(B)$ ou $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
- ***Règles de construction d'un arbre de probabilités***
  - La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est ***1***.
  - La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

SOLUTIONS

1. a) $x = p(B|A)$; $y = p(B|\overline{A})$

b)



2. $P(B) = 0.2x + 0.8y$
3. A et B sont indépendants $\Leftrightarrow p(B|A) = p(B)$
   $\Leftrightarrow x = 0.2x + 0.8y \Leftrightarrow x = y$.

Objectif 2

Modéliser une situation de probabilité conditionnelle par un arbre de probabilités

ENONCES

On jette une pièce de monnaie
- Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
- Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.

1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire sachant qu'on a obtenu pile
3) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire
4) Sachant qu'on a tiré une boule noire , quelle est la probabilité que l'on a obtenu pile

SAVOIR

- Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilité
- ***Formule des probabilités totales***

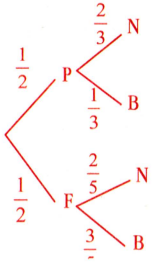
Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une ***partition*** de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.

Alors : $p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \ldots + p(B \cap A_n)$

Ou $p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \ldots\ldots + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$.

SOLUTIONS

1) Notons P l'événement « obtenir pile » et F : « obtenir face »
N l'événement : « tirer une boule noire » et B : « tirer une boule blanche »



2) $P(N|P) = \frac{2}{3}$

3) $P(N) = p(P) \times p(N|P) + p(F) \times p(N|F)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$

4) $P(P|N) = \frac{p(P \cap N)}{p(N)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{8}$

Objectif 3

Calculer la probabilité d'une intersection des événements

ENONCES

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher. On effectue 3 tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne; si elle est blanche, on ne la remet pas.
Si k est un entier compris entre 1 et 3, on note E_k l'événement "seule la $k^{ième}$ boule tirée est blanche".

1. Montrer que la probabilité de l'événement E_1 est $p(E_1)=\frac{5}{36}$.

2. Calculer les probabilités des événements E_2 et E_3.
   En déduire la probabilité qu'on ait tiré une seule boule blanche à l'issue des 3 tirages.

SAVOIR

☞ ***Principe des probabilités composées***
Si A, B et C sont trois événements tels que $p(A) \neq 0$ et $p(A \cap B) \neq 0$
alors $P(A \cap B \cap C) = p(A) \times p(B|A) \times p(C|A \cap B)$

SOLUTIONS

1. E_1 : « seule la première boule tirée est blanche »

$(B, R, R) \Rightarrow p(E_1) = p(B) \times p(R|B) \times p(R|B \cap R) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{36}$

2. E_2 : « seule la deuxième boule tirée est blanche »

$(R, B, R) \Rightarrow p(E_2) = p(R) \times p(B|R) \times p(R|B \cap R) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{10}{81}$

E_3 : « seule la troisième boule tirée est blanche »

$(R, R, B) \Rightarrow p(E_3) = p(R) \times p(R|R) \times p(B|R \cap R) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{80}{729}$

E : "une seule boule blanche tirée à l'issue des trios tirages" $\Rightarrow E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ (réunion disjointe)

$\Rightarrow p(E) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{1085}{2916}$

Objectif 4

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire et calculer ses paramètres

ENONCES

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait simultanément 2 boules.

On perçoit un dinar pour chaque boule rouge tirée. Désignons par X la somme gagnée à l'issue d'un tirage de 2 boules.

1. Déterminer la loi de probabilité de X
2. Calculer son espérance mathématique, sa variance et son écart type.

SAVOIR

- Il est commode de présenter la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

- L'espérance de X est : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} (p_i x_i)$.
- La variance de X est : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2$.
- L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

SOLUTIONS

1.

Gain x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
Probabilité $p_i = p(X = x_i)$	$\frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$	$\frac{C_4^1 \times C_3^1}{C_7^2} = \frac{4}{7}$	$\frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$

2. $E(X) = \frac{6}{7}$; $V(X) = \frac{2}{7} \times 0 + \frac{4}{7} \times 1 + \frac{1}{7} \times 4 - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{8}{7} - \frac{36}{49} = \frac{20}{49} \approx 0,408$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$

Objectif 5

Reconnaître une loi binomiale et calculer ses paramètres

ENONCES

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher : six boules blanches et quatre boules noires.

1. Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules du sac. Calculer la probabilité de l'évènement suivant : S : « Tirer trois boules blanches »
2. On répète l'épreuve précédente trois fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'événement S est réalisé.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Calculer son espérance mathématique et son écart type.
   c) Calculer la probabilité de l'événement : « $(1 \leq X < 3)$ »

SAVOIR

- On appelle schéma de Bernoulli, une suite d'épreuves identiques qui vérifient les conditions suivantes :
  - Chaque épreuve donne lieu à deux issues : « S » : succès et « E » : échec.
  - Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
  - La probabilité de S (respectivement de E) est la même pour chaque épreuve.
- Soit X l'aléa numérique qui à chaque série d'épreuves associe le nombre de succès obtenus.

Si l'épreuve est répétée n fois alors $X(\Omega) = \{0,1,2,.....,n\}$

et on a pour tout $k \in \{0,1,.....,n\}$, $p(X=k) = C_n^k \times [p(S)]^k \times [p(E)]^{n-k}$

→ on dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p = p (S) ou aussi une loi de Bernoulli qu'on note B (n, p).

Théorème :

Soit X un aléa numérique qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Alors $E(X) = n \times p$, $V(X) = np(1-p) = n \times p \times q$ où $q = 1-p$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

SOLUTIONS

1. $p(S) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$

2. Répétition trois fois de suite d'une même épreuve dans les mêmes conditions

⇒ X suit une loi binomiale de paramètres n = 3 et p = p(S) = $\frac{1}{6}$

a) $X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ et pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, $p(X=k) = C_3^k \times \left[\frac{1}{6}\right]^k \times \left[\frac{5}{6}\right]^{3-k}$

b) $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ et $\delta(X) = \sqrt{3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5}{12}}$

c) $P(1 \leq X < 3) = p(X=1) + p(X$

Objectif 6

Calculer la probabilité uniforme sur un intervalle

ENONCES

Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 heures et 7 heures 30. La variable aléatoire sera l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l'intervalle $[0\,;30]$.

1. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le prochain bus ?
2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?

SAVOIR

☞ Soit un intervalle $[a,b]$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la probabilité uniforme sur $[a,b]$.

☞ On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d f(x)dx$.

☞ On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a,b]$ suit la loi de probabilité uniforme p si : $p(c\le X\le d)=\int_c^d f(x)dx=\dfrac{d-c}{b-a}$

SOLUTIONS

La variable aléatoire est le temps uniformément réparti sur 30 minutes donc $f(x) = 1/30$.

1. L'attente n'est inférieure à cinq minutes que s'il arrive entre 7 h 10 et 7 h 15 ou entre 7 h 25 et 7 h 30.

On a donc $p(10\le X\le 15)=p(25\le X\le 30)=\int_{25}^{30}\dfrac{1}{30}dx=\dfrac{1}{6}$,

soit la probabilité cherchée égale à $2.\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$.

2. De même on a $p(0\le X\le 5)+p(15\le X\le 20)=\dfrac{1}{3}$.

Objectif 7

Calculer la probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle

ENONCES

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est la variable exponentielle de paramètre $\frac{1}{10}$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous.

1. Quelle est la probabilité que vous attendiez plus de dix minutes ?
2. Quelle est la probabilité que vous attendiez entre dix et vingt minutes ?

SAVOIR

☞ Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

☞ On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application p qui :

- *à* tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$
- *à* tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,+\infty[)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_c^x \lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda c}$

SOLUTIONS

1. L'attente est supérieure à dix minutes, on a $p(X>10)=e^{-\frac{1}{10}\times 10}=e^{-1}\approx 0{,}37$.

2. De même on a $p(10\le X\le 20) = p(10\le X\le 20)=\int_{10}^{20}\frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx=e^{-1}-e^{-2}\approx 0{,}23$.

Utiliser la calculatrice (casio fx 570 ES ou fx 570 ES plus ou fx 991 ES plus)

Le mode COMP

COMP comme « ***computer*** » (calculateur) est le mode dans lequel il faut mettre la calculatrice pour réaliser des calculs scientifiques. Il s'obtient en pressant successivement la touche et la touche .Dans ce mode, rien n'est inscrit en haut de l'affichage hormis l'indication de l'unité d'angle. Dans la suite des explications, si rien n'est précisé, les calculs s'effectueront en mode ***COMP***.

Exemple

$C_{10}^{3}=120$

$A_{10}^{3}=720$

CHAPITRE 8

STATISTIQUES

Objectif 1

Exploiter le point moyen

ENONCES

Dans la série statistique ci-contre, deux valeurs ont été effacées

x_i	8,2	7,4		6,1	9
y_i	15	12,1	16,3		12

On connaît, par contre, le point moyen G par ses coordonnées : $x_G = 7,5$ et $y_G = 12,6$.

Pouvez-vous retrouver les valeurs manquantes ?

SAVOIR

Soit une série statistique à deux variables, X et Y, dont les valeurs sont des couples $(x_i ; y_i)$

On appelle point moyen de la série le point G de coordonnées $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\ y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \end{cases}$.

SOLUTIONS

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} \\ y_G = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7,5 = \dfrac{8,2 + 7,4 + x_3 + 6,1 + 9}{5} \\ 12,6 = \dfrac{15 + 12,1 + 16,3 + y_4 + 12}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30,7 + x_3 = 37,5 \\ 55,4 + y_4 = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 6,8 \\ y_4 = 7,6 \end{cases}$$

Objectif 2

Ajuster une série statistique par la méthode de Mayer

ENONCES

Une entreprise consacre une certaine somme à des opérations publicitaires au début de chaque mois. Le tableau suivant met en évidence la relation entre les ventes réalisées et les frais de publicité engagés au début de chaque mois.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet
Frais de Pub (**en millier de dinars**)	40	90	100	60	130	160	20
Ventes (**en millier de dinars**)	1400	2000	2500	2000	2900	3000	1000

1°) ***a)***Dans un repère, représenter le nuage de points associé à cette série.
b)Déterminez les coordonnées de G, point moyen de nuage. Placez le point G.

2°) Calculer les coordonnées des points moyens

- Pour le groupe des 3 premiers points : Point moyen G_1.
- Pour le groupe des 4 derniers points : Point moyen G_2.

3°) Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2).Tracer (G_1G_2).

4°) Estimer quel montant des ventes on peut prévoir avec des frais de publicité de 200 000 dinars (***Par le calcul, puis vérifier graphiquement***)

SAVOIR

▶Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on appelle ***nuage de points*** associé à une série statistique à deux variables, l'ensemble des points $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2;y_2)$; ..... $M_n(x_n;y_n)$

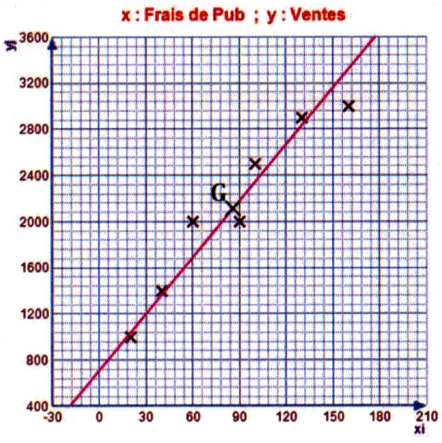
▶Le principe d'ajustement affine suivant la méthode de Mayer consiste à partager le nuage de points en deux sous-nuages et de calculer pour chacun le point moyen G_1 et G_2.

▶La droite d'ajustement est alors la droite (G_1G_2)dont on peut donner une équation.

▶La droite de Mayer passe par le point moyen.

SOLUTIONS

1°) *a)*



b) Les coordonnées de G sont :

$$\begin{cases} x_G = \overline{x} = \dfrac{40+90+100+60+130+160+20}{7} \approx 85{,}714 \\ y_G = \overline{y} = \dfrac{1400+2000+2500+2000+2900+3000+1000}{7} \approx 2114{,}286 \end{cases}$$

2°) Les coordonnées de G_1 et G_2 sont :

$$\begin{cases} x_{G_1} = \dfrac{40+90+100}{3} = \dfrac{230}{3} \\ y_{G_1} = \dfrac{1400+2000+2500}{3} = \dfrac{5900}{3} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{G_2} = \dfrac{60+130+160+20}{4} = 92{,}5 \\ y_{G_2} = \dfrac{2000+2900+3000+1000}{4} = 2225 \end{cases}$$

3) L'équation de la droite (G_1G_2) est de la forme $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} \approx 16{,}316$

D'où on tire $b = \overline{y} - a\overline{x} \approx 715{,}773$. L'équation de (G_1G_2) est donc : $y = 16{,}316x + 715{,}773$.

4°) $x = 200$; $y = 16{,}316 \times 200 + 715{,}773 = 3978{,}973$.

Le montant des ventes avec des frais de pub de 200 000 dinars est 3978973 dinars.

Objectif 3

Ajuster une série statistique par la méthode des moindres carrés

ENONCES 1

Le tableau ci-contre donne une estimation du montant des achats en ligne des ménages tunisiens, en millions de dinars, de 2005 à 2011.

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Montant en millions dinars y_i	90	260	820	1650	2300	4000	5300

1°) Dans un repère, représenter le nuage de points associé à cette série. Un ajustement semble-t-il justifié ?
2°) Calculer les coordonnées du point moyen.
3°) Déterminer une équation de la droite d'ajustement (D) de y en x par la méthode des moindres carrés, en présentant les calculs dans un tableau.
4°) Tracer cette droite dans le graphique précèdent.
5°) En supposant que ce modèle reste plausible, estimer le montant des achats en ligne des ménages tunisiens en 2012.

SAVOIR

▶ Lors d'un ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés, la droite (D) qui représente dans un repère la fonction $f : x \mapsto ax + b$ a pour coefficient directeur :

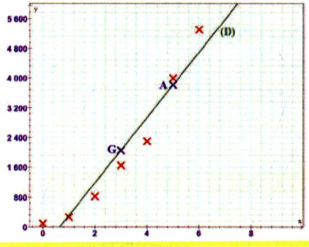
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$ et passe par le point moyen $G(\overline{x}; \overline{y})$.

▶ La droite (D) est appelée la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.

On l'appelle parfois droite de régression de y en x. Une équation de (D) est : $y = a(x - \overline{x}) + \overline{y}$.

SOLUTIONS

1°) Le nuage de point est allongé, un ajustement affine est alors justifié.



2°) $\overline{x}=\dfrac{0+1+\cdots+6}{7}=3$ et $\overline{y}=\dfrac{90+260+\cdots+5300}{7}=2060$.

Le point moyen a pour coordonnées $G(3;2060)$.

x_i	y_i	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$	$y_i-\overline{y}$	$(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$
0	90	–3	9	–1970	5910
1	260	–2	4	–1800	3600
2	820	–1	1	–1240	1240
3	1650	0	0	–410	0
4	2300	1	1	240	240
5	4000	2	4	1940	3880
6	5300	3	9	3240	9720
Total	21	14420		28		24590

3°) Équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindre carrés :

La droite (D) d'ajustement de y en x passe par $G(3;2060)$ et a pour coefficient directeur $a=\dfrac{24590}{28}$

c'est-à-dire $a\approx 878,21$.

Une équation de (D) est donc : $y=878,21\times(x-3)+2060$ $y=878,21x-574,63$

4°) La droite (D) passe par le point moyen G et le point $A(5;3816,42)$.

5°) L'année 2012 correspond au rang 7.

$y=878,21\times 7-574,63$ c'est-à-dire $y=5572,84$.

On peut estimer qu'en 2012 le montant des achats en ligne des ménages tunisien s'élèvera à 5572,84 millions de dinars.

ENONCES 2

Dans une grande surface, le prix de vente promotionnel d'un produit ***(en DT)*** est affiché en fonction de son poids ***(en g)*** dans le tableau suivant :

Prix du produit (en D.T) : X	0,650	0,900	1,100	1,300	1,500	2,600
Poids du produit (en g) : Y	100	150	200	250	300	500

1°) Construire le nuage de points de cette série statistique.

2°) Calculer Cov(X ;Y), $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

3°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire ***r*** de la série (X, Y). Un ajustement affine est-il justifié ?

4°) Donner les équations des droites de régression relativement à un repère orthogonal du plan.

5°) Quel prix peut-on prévoir pour un produit de poids ***1 kg*** ?

SAVOIR

▶On appelle covariance d'une série double, le réel noté Cov(X, Y) défini par : $Cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\overline{X}.\overline{Y}$ où $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont les moyennes arithmétiques respectives des distributions $(x_i)_{1\le i\le n}$ et $(y_i)_{1\le i\le n}$ de X et Y.

Remarque

On a : $Cov(X,Y)=\overline{XY}-\overline{X}.\overline{Y}$; où $\overline{XY}$ désigne la moyenne arithmétique de la distribution $(x_i y_i)_{1\le i\le n}$ du caractère statistique produit XY.

▶On appelle coefficient de corrélation linéaire entre les variables x et y le rapport $r=\frac{cov(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$

▶Il a le même signe que les coefficients directeurs a et a' des droites de régression.

▶Son carré est le produit de ces coefficients : $r^2=a\times a'$.

▶Le coefficient de corrélation linéaire r vérifie $-1\le r\le 1$.

▶Les points $M_i(x_i;y_i)$ sont alignés si et seulement si $r=1$ ou $r=-1$.

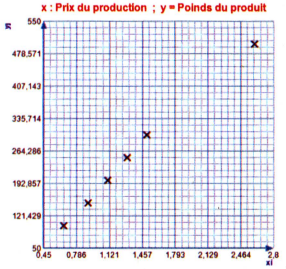
▶Lorsque le ***coefficient de corrélation linéaire*** r du couple (X, Y) est proche, en valeur absolue, de 1 ($\frac{\sqrt{3}}{2}\le|r|\le 1$), le nuage de points de la série considérée a une forme allongée et il est possible d'approcher la liaison entre X et Y par deux relations affines représentées graphiquement par deux droites D_1 et D_2 passant par le point moyen $G(\overline{X},\overline{Y})$ du nuage. La droite D_1 : appelée droite de régressionde Y en X et ayant pour équation : $y=ax+b$ avec $a=\frac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b=\overline{Y}-a\overline{X}$;

La droite D_2 : appelée droite de régression de X en Y et ayant pour équation :

$x=a'y+b'$ avec $a'=\frac{cov(X,Y)}{V(Y)}$ et $b'=\overline{X}-a'\overline{Y}$.

SOLUTIONS

1°)



2°) $\text{cov}(X,Y)=0,997$; $\sigma(X)=0,624$; $\sigma(Y)=129,099$

3°) $r=0,997$. $|r|=|0,997|>\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.

4°) Droite de régression de Y en X : $y = 206,512x - 27,139$.
Droite de régression de X en Y : $x = 0,005y + 0,092$.

5°) $1k=1000g$. $y=1000$; $x=0,005\times1000+0,092=5,095$.
Le prix pour un produit de poids 1 kg est 5,095 DT.

ENONCES 3

Le tableau suivant est à double entrée : X_i = ***la note en Math.*** ; Y_j= ***la note en phyique.***
Il représente les résultats d'un concours proposé à un groupe de 20 élèves.

Y_j \ X_i	8	9	10	12	14	Total (lignes)
7	2	2	0	…	0	4
9	1	2	…	0	0	5
10	…	2	1	2	…	5
13	0	0	0	3	1	4
15	0	0	…	0	2	2
Total (Colonnes)	3	6	3	5	3	20

1°) ***a)*** Remplir les cases vides.
b) Déterminer n_{23} et n_{45} .
2°) Construire le nuage des points pondérés $(x_i, y_j).n_{ij}$
3°) Calculer : $\overline{X}$, $\overline{Y}$ et placer le point moyen G.
4°) Calculer : V(X) , V(Y) et Cov(X,Y).
5°) Justifier l'existence d'un ajustement affine du nuage.
6°) Donner les équations des droites de régression.
7°) Si un élève avait ***17*** en physique , quelle note en math pourrait-il estimer avoir ?

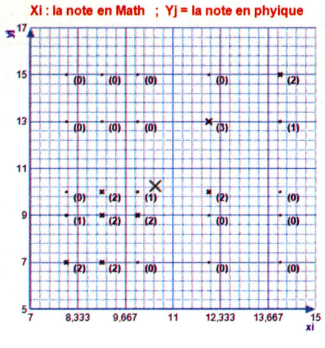
SOLUTIONS

1°) ***a)***

Y_j \ X_i	8	9	10	12	14	Total (lignes)
7	2	2	0	0	0	4
9	1	2	2	0	0	5
10	0	2	1	2	0	5
13	0	0	0	3	1	4
15	0	0	0	0	2	2
Total (Colonnes)	3	6	3	5	3	20

b) $n_{23}=2$ et $n_{45}=1$.

2°)



3°) $\begin{cases} \overline{x} = 10,5 \\ \overline{y} = 10,25 \end{cases}$;donc $G(10,5;10,25)$.

4°) $V(X) \approx 4,05$; $V(Y) \approx 6,287$; $Cov(X,Y) \approx 4,475$.

5°) $r = 0,887$. $|r| = |0,887| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.

6°) Droite de régression de Y en X : y = 1,105x – 1,353.
Droite de régression de X en Y : $x = 0,712y + 3,202$.

7°) $y = 17$; $x = 0,712 \times 17 + 3,202 \approx 15,30$

Objectif 4

Ajuster une série statistique par une fonction logarithmique

ENONCES

1°) L'entreprise K-gaz fabrique et commercialise également un produit chimique. Pour des raisons partiques, sa prodution mensuelle ne peut pas eccéder 10 tonnes.
L'entreprise K-Gaz a relevé le coût total de production mensuel (en milliers de dinars), noté y, en fonction de la production x (en tonnes).

x	1	2	4	6	8	10
y	32 ,5	38,5	44,6	48,4	51,1	53,3

a) Le nuage ne semblant pas totalement se preter à un ajustement affine on décide de poser : $z = e^{0,1y}$
Completer le tableau en arronissant les valeurs de z au centième.

x	1	2	4	6	8	10
z	25,79	46,99				

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de regression de z en x par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients à la première décimale).
c) Expliquer pourquoi cet ajustement semble justifié.
2°) a) Utiliser le resultat de la question 1°) b) pour obtenir une expresion de y en fonction de x.
b) En utiliser cette équation, estimer le coût total correspondant à une production de 7 tonnes.

SAVOIR

$\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \in]0,+\infty[$ on a:

- $\ln[\exp(x)] = x$ *et* $\exp[\ln(y)] = y$,
- $x = \ln y \Leftrightarrow y = \exp x$.

SOLUTIONS

1°) *a)*

x	1	2	4	6	8	10
z	25,79	46,99	86,49	126,47	165,67	206,44

b) $z = 19,6x + 7,6$

2°) *a)* $z = e^{0,1y} \Leftrightarrow 0,1y = \ln z \Leftrightarrow y = \dfrac{\ln z}{0,1} = \dfrac{19,6x + 7,6}{0,1} = 196x + 76$.

b) $x = 7$, $y = 196 \times 7 + 76 = 1448$

Objectif 5

Ajuster une série statistique par une fonction exponentielle

ENONCES

Le tableau suivant indique l'évolution de la consommation d'énergie électrique dans un pays au cours de 8 années successives :

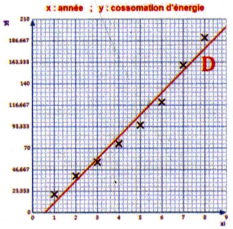
X : année	1	2	3	4	5	6	7	8
Y : consommation (en Twh)	20	40	55	75	95	120	160	190

1°) ***a)*** Représenter le nuage de points de la série double (X, Y) dans un repère orthogonal du plan.
b) Calculer le coefficient r_1 de corrélation linéaire du couple (X, Y).
c) Déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite D de régression de Y en X et construire D.

2°) On suppose que la relation entre X et Y est du type exponentiel : $Y = k.e^{aX}$ et on pose $V = \ln(Y)$
a) Représenter le nuage de points de la série double (X, V) dans un repère orthogonal du plan.
b) Calculer le coefficient r_2 de corrélation linéaire du couple (X, V).
c) En déduire qu'il y'a une forte corrélation linéaire entre V et X puis construire la droite Δ de régression de V en X.
d) En écrivant $V = a.X + b$ où $b = \ln(k)$, trouver alors les réels a et b.

SOLUTIONS

1°) ***a)*** Représentation du nuage de points de la série double (X, Y) ; voir figure ci-contre :



b) On a :

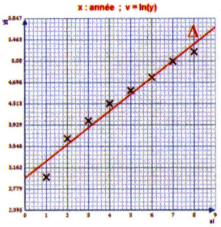
$\overline{X} = 4,5$; $\overline{Y} = 73$; $\sigma(X) = 2,29$; $\sigma(Y) = 46,64$;

$\text{cov}(X,Y) = 50,5$; $r_1 = r(X,Y) = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)} = 0,47$

c) Une équation de la droite D de régression de X en Y est : $y = 9,62.x + 29,71$.

2°) a) $V = \ln(Y)$; On a :

X	1	2	3	4	5	6	7	8
V	2.995	3.688	4.007	4.317	4.553	4.787	5.075	5.247



b) On a : $\overline{X}=4,5$; $\overline{V}=4,33$; $\sigma(X)=2,29$; $\sigma(V)=0,7$;

$\text{cov}(X,V)=1,579$; $r_2=r(X,V)=\dfrac{\text{cov}(X,V)}{\sigma(X).\sigma(V)}=0,98$;

On a $r_2=r(X,V)=0,98$ est voisin de 1 donc il y a forte corrélation linéaire entre v et x et un ajustement affine est alors, justifié.

c) Voir graphique au-dessus.

d) Une équation de la droite Δ de régression de X en V est : $v=0,3.x+2,98$.

Ainsi, $a=0,3$ et $b=2,98$ ce qui donne : $Y=e^{2,98}.e^{0,3.X}=e^{0,3.X+2,98}$.

Objectif 6

Ajuster une série statistique par une fonction polynôme

ENONCES

Une enquête menée pour le compte d'une entreprise a permis d'établir le nombre d'acheteurs d'un produit A selon le montant de son prix de vente. Les résultats de l'enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous dans lequel :

- x_i désigne le prix de vente unitaire (en dinars) du produit A
- y_i le nombre d'acheteurs en milliers.

x_i	1	1,50	2	3	4
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

1°) Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan (*unités graphiques* : 4 cm pour 1 euro en abscisse et 2 cm pour 1 000 acheteurs en ordonnée).

2°) On recherche un ajustement affine de la série $(x_i; y_i)$.

a) Donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. *Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au centième ; on ne demande aucune justification.*

b) Tracer cette droite dans le même repère que précédemment.

c) Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 dinars.

3°) La forme du nuage permet d'envisager un ajustement à l'aide d'une parabole. On pose $z_i = (0{,}75x_i - 3{,}16)^2$

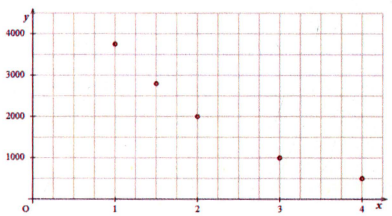
a) Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en z par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis à* 10^{-3} *près*).

b) Vérifier que la nouvelle estimation de y en fonction de x est donnée par $y = 0{,}313x^2 - 2{,}64x + 6{,}062$ (*les coefficients sont arrondis à* 10^{-3} *près*).

c) En utilisant cet ajustement, donner une nouvelle estimation du nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 dinars.

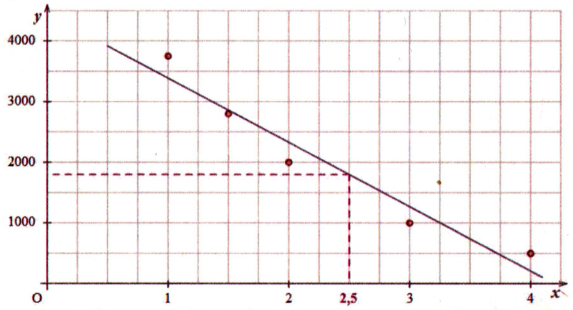
SOLUTIONS

1°)



2°) ***a)*** Une équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est : (coefficients arrondis au centième) $y = -1{,}06x + 4{,}45$.

b)



c) Si le prix de vente est de 2,50 dinars alors, une estimation du nombre d'acheteurs, exprimé en milliers est : $y = -1{,}06 \times 2{,}5 + 4{,}45 = 1{,}8$

Pour un produit vendu 2,50 dinars, le nombre d'acheteurs potentiels est de 1800.

3°)

x_i	1	1,50	2	3	4
$z_i = (0{,}75x_i - 3{,}16)^2$	5,8081	4,141225	2,7556	0,8281	0,0256
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

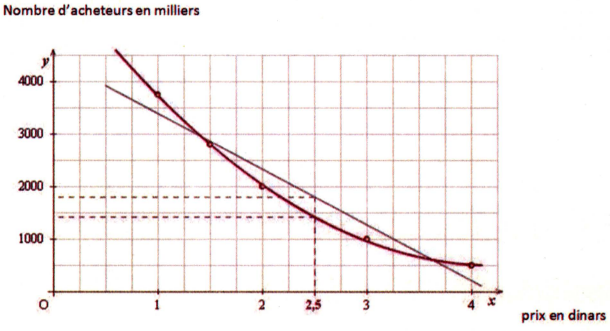
a) Une équation de la droite d'ajustement de y en z obtenue par la méthode des moindres carrés est : $y = 0{,}557z + 0{,}500$ (coefficients arrondis à 10- 3 près).

b) $y = 0{,}557z + 0{,}500$ et $z = (0{,}75x - 3{,}16)^2$ alors $y = 0{,}557\,(0{,}75x - 3{,}16)^2 + 0{,}5$ équivalent à $y = 0{,}557(0{,}5625x^2 - 4{,}74x + 9{,}9856) + 0{,}5$ soit $y = 0{,}313313x^2 - 2{,}64018x + 6{,}0619792$

La parabole qui ajuste le nuage de points a donc bien pour équation : $y = 0{,}313x^2 - 2{,}64x + 6{,}062$.

c) Le prix de vente est de 2,50 dinars alors, une nouvelle estimation du nombre d'acheteurs, exprimé en milliers est : $y = 0{,}313 \times 2{,}5^2 - 2{,}64 \times 2{,}5 + 6{,}062 = 1{,}41825$

Pour un produit vendu 2,50 dinars, le nombre d'acheteurs potentiels est de 1418.



Objectif 7

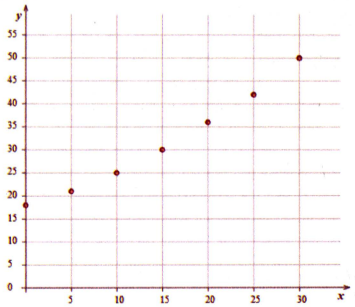
Ajustement affine - Ajustement exponentiel - Calcul d'une valeur moyenne

ENONCES

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1970 et 2000.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants y	18	21	25	30	36	42	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté sur le graphique ci-dessous : le rang x de l'année est en abscisse et la population y en ordonnée.



PARTIE A : AJUSTEMENT AFFINE

1°) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite sur le graphique donné.

2°) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

PARTIE B : UN AJUSTEMENT EXPONENTIEL

1°) L'allure du nuage incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=ae^{bx}$ où a et b sont des réels.

Déterminer a et b tels que $f(0)=18$ et $f(30)=50$. On donnera une valeur arrondie de b au millième.

2°) Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

3°) Tracer la courbe représentative de f sur le graphique donné.

4°) La population en 2003 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

PARTIE C : CALCUL D'UNE VALEUR MOYENNE

On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang x par $f(x)=18e^{0,034x}$.

1°) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur [0 ; 30] ; on donnera le résultat arrondi au dixième.

2°) À l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population a atteint cette valeur moyenne ?

SAVOIR

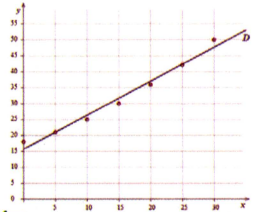
Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I et a, b deux réels appartenant à I tels que $a<b$.

On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$, le nombre : $\overline{f}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

SOLUTIONS

PARTIE A : AJUSTEMENT AFFINE

1°) Une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés obtenue à l'aide calculatrice est : $y=1,06x+15,75$ (*coefficients arrondis au centième*)



2°) Le rang de l'année 2003 est $x=33$.

Une estimation de la population en 2003 obtenue à partir de l'ajustement affine est :

$y=1,06\times 33+15,75=50,73$ En 2003, la population est estimée à 51 milliers d'habitants.

PARTIE B : UN AJUSTEMENT EXPONENTIEL

1°) $f(0)=18$ alors a et b sont solutions de l'équation $ae^{bx0}=18\Leftrightarrow a=18$

$f(30)=50$, alors a et b sont solutions de l'équation $ae^{30b}=50$.

Ainsi a et b sont solutions du système d'équation $\begin{cases}a=18\\ae^{30b}=50\end{cases}$

$$\begin{cases}a=18\\ae^{30b}=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=18\\18e^{30b}=50\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=18\\e^{30b}=\dfrac{25}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=18\\\ln(e^{30b})=\ln(\dfrac{25}{9})\end{cases}$$

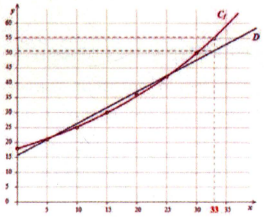
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=18\\30b=\ln 25-\ln 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=18\\b=\dfrac{\ln 25-\ln 9}{30}=\dfrac{2\ln 5-2\ln 3}{30}=\dfrac{\ln 5-\ln 3}{15}\end{cases}$$

Par conséquent, la valeur arrondie de b au millième, obtenue à la calculatrice est 0,034.

Ainsi f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=18e^{0,034x}$.

2°) En 2003 une estimation à l'aide de cet ajustement est $f(33)=18e^{0,034\times 33}\approx 55,2778$.

3°)



4°) L'estimation la plus proche de la population réelle est celle obtenue avec un ajustement exponentiel.

PARTIE C : CALCUL D'UNE VALEUR MOYENNE

1°) $\overline{f} = \dfrac{1}{30-1}\displaystyle\int_0^{30} 18e^{0,034x}dx = \dfrac{18}{30}\int_0^{30} e^{0,034x}dx$.

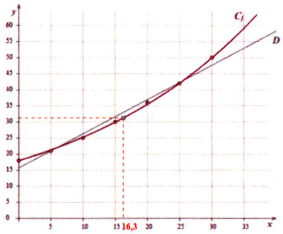
Or sur $[0;30]$, une expression d'une primitive de la fonction $g : x \mapsto e^{0,034x}$ est $G : x \mapsto \dfrac{e^{0,034x}}{0,034}$.

D'où $\dfrac{18}{30}\displaystyle\int_0^{30} e^{0,034x}dx = \frac{3}{5}\left[\frac{e^{0,034x}}{0,034}\right]_0^{30} = \frac{3}{5}\left(\frac{e^{0,034\times 30} - e^{0,034\times 0}}{0,034}\right) = \frac{3\left(e^{1,02}-1\right)}{0,17}$.

Avec la calculatrice on trouve $\dfrac{3\left(e^{1,02}-1\right)}{0,17} \approx 31,2917$.

Ainsi l'arrondi au dixième de la valeur moyenne de la fonction f sur $[0;30]$ est 31,3.

2°)



La droite d'équation $y = 31,3$ coupe la courbe C_f en un point dont l'abscisse est comprise entre 16 et 17.

C'est donc au cours de la dix-septième année à partir de 1970 que la population atteint 31,3 milliers d'habitants.

La population a atteint 31,3 milliers d'habitants au cours de l'année 1987.

Remarque: On peut valider par le calcul le résultat obtenu graphiquement.

Soit n le rang de l'année au cours de laquelle la population atteindra 31,3 milliers d'habitants.

n est le plus petit entier solution de l'inéquation

$$18e^{0,034n} \geqslant 31,3 \Leftrightarrow e^{0,034n} \geqslant \frac{31,3}{18}$$

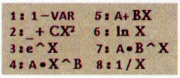
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{0,034n}\right) \geqslant \ln\left(\frac{31,3}{18}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0,034n \geqslant \ln(31,3) - \ln(18)$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(31,3) - \ln(18)}{0,034} \approx 16,272.$$

Utilisation d'une calculatrice (Casio fx 570 ES ou fx 570 ES ou fx 991 ES plus)

Tous les calculs mentionnés ici s'effectuent dans le mode STAT



Types de calculs statistiques

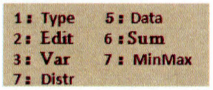
Touche	Elément du menu	Calcul statistique
1	*1-VAR*	*Une variable*
2	*A+BX*	*Régression linéaire*
3	*_+CX2*	*Régression quadratique*
4	*In X*	*Régression logarithmique*
5	*e^X*	*Régression exponentielle e*
6	*A•B^X*	*Régression exponentielle ab*
7	*A•X^B*	*Régression de puissance*
8	*1/X*	*Régression inverse*

Utilisation du menu STAT

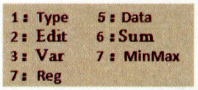
Lorsque l'écran de l'éditeur STAT ou l'écran de calcul STAT est affiché, appuyez sur

pour afficher le menu STAT.

Le contenu du menu STAT est différent selon qu'une variable ou deux variables sont utilisées pour le calcul statistique actuellement sélectionné.



Statistiques à une variable

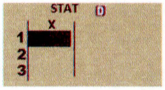


Statistiques à deux variables

Exemple 1 : On considère la série statistiqueà une variable :

X	*10*	*14*
Effectif	*40*	*20*

❑ On passe en mode statistique

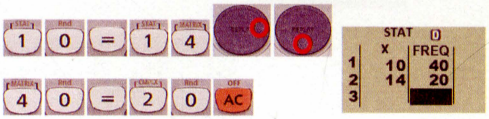


❑Afficher la colonne des effectifs

(FREQ)

❑Introduction des données

X	*Effectif*
10	40
14	20

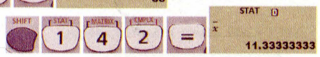


❑Pour déterminer l'effectif total

☞ On trouve : $N = 60$

❑Pour déterminer la moyenne

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{X} \approx 11{,}33$



❑Pour déterminer l'écart type

☞ On trouve l'écart type : ≈

❑Pour déterminer la variance

☞ On trouve la variance : $V \approx$

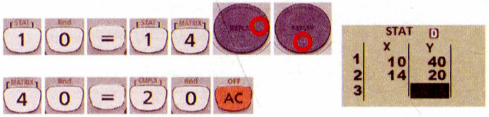
Exemple 2 : On considère la série statistique à deux variables :

X	*10*	*14*
Y	*40*	*20*

❑ On passe en mode statistique

❑Introduction des données

X	*Y*
10	40
14	20



❑Pour déterminer la moyenne de X

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{X} = 12$

❑Pour déterminer la moyenne de Y

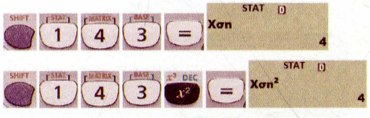
☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{Y} = 30$

❑Pour déterminer l'écart type X

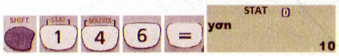
☞ On trouve l'écart type : X =

❑Pour déterminer la variance de X

☞ On trouve la variance de X : VX =



❑Pour déterminer l'écart type Y



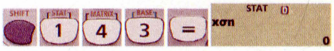
☞ On trouve l'écart type : Y =

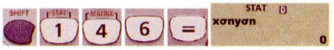
❑Pour déterminer la variance de Y

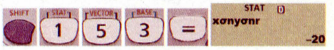
☞ On trouve la variance de Y : *V* Y =

❑Pour déterminer la covariance de (X ,Y)

☞ On trouve la covariance :*Cov*(X ,Y) =

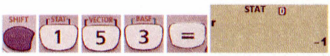






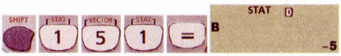
❑Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire r...:

☞ On trouve: r_{xy} =

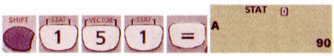


❑Droite de moindre carrés de Y en X oudroite de régression deY en X. (Y=BX+A)

☞ On trouve: B =



☞ et on trouve: A =

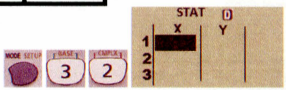


d'où Y = 5X+90

Exemple 3 : On considère la série statistique à double entrée :

X \ Y	2	3	4
10	12	8	2
20	6	20	10

❑ On passe en mode statistique



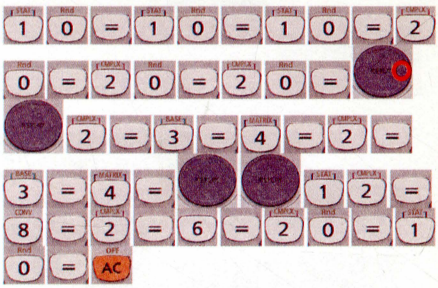
❑Afficher la colonne des effectifs

(FREQ)

❑Introduction des données

X	Y	FREQ
10	2	12
10	3	8
10	4	2

20	*2*	*6*
20	3	20
20	4	10



❑Pour déterminer la moyenne de X

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{X}} \approx 16.21$

❑Pour déterminer la moyenne de Y

☞ On trouve la valeur moyenne : $\overline{\mathbf{Y}} \approx 2.9$

❑Pour déterminer l'écart type X

☞ On trouve l'écart type : X ≈

❑Pour déterminer la variance de X

☞ On trouve la variance de X : *V* X ≈

❑Pour déterminer l'écart type Y

☞ On trouve l'écart type : Y ≈

❑Pour déterminer la variance de Y

☞ On trouve la variance de Y : *V* Y ≈

❑Pour déterminer la covariance de (X ,Y)

☞ On trouve la covariance :*Cov*(X ,Y) ≈

❑Pour déterminer le coefficient de corrélation linéaire r_{xy}:

☞ On trouve: r_{xy} =

COLLECTION

KOUNOUZ BAC

SECTION

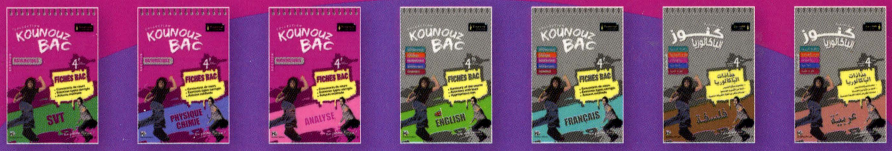
MATHÉMATIQUES

FICHES BAC 4e année secondaire

Chaque fiche traite un point fondamental du programme en proposant :

- Un résumé de cours bien conçu pour comprendre et mémoriser l'essentiel.
- Des exercices types corrigés pour acquérir les bonnes méthodes et éviter les pièges.
- Astuces méthode démarche ingénieuse bien organisée pour aboutir au résultat.

> Dans cette collection



> Découvrez toute la gamme

- **Sciences Informatiques :** Algorithme et Programmation - Base de données - TIC - Mathématiques - Physique/Chimie - Français - Anglais - عربية - فلسفة
- **Mathématiques :** Analyse - Géométrie - SVT - Physique/Chimie - Français - Anglais - عربية - فلسفة
- **Techniques :** Mécanique - Électricité - Physique/Chimie - Mathématiques - Français - Anglais - عربية - فلسفة
- **Sciences Expérimentales :** SVT - Mathématiques - Physique/Chimie - Français - Anglais - عربية - فلسفة
- **Sciences Économiques :** Économie - Gestion - Mathématiques - Français - Anglais - عربية - فلسفة - تاريخ وجغرافيا
- **Lettres :** Français - Anglais - عربية - فلسفة - تاريخ وجغرافيا - تفكير إسلامي

Kounouz Editions
www.kounouz-edition.com

9 789938 064766
ISBN: 978-9938-064-76-6